UFRJ

Politécnica
UFRJ

CONCURSO DE PROVAS E TÍTULOS DO MAGISTÉRIO SUPERIOR
EDITAL N° 54 DE 30/01/2024 – PUBLICADO NO DOU N° 24 DE 02/02/2024

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

VAGA MC-205 – SETOR DE ELETROMAGNETISMO E APLICAÇÕES A SISTEMAS ELÉTRICOS

DIA: 11 de novembro de 2024.

LOCAL: Sala H-227A - Bloco H - Escola Politécnica/CT/UFRJ

CADERNO DE QUESTÕES - PROVA ESCRITA

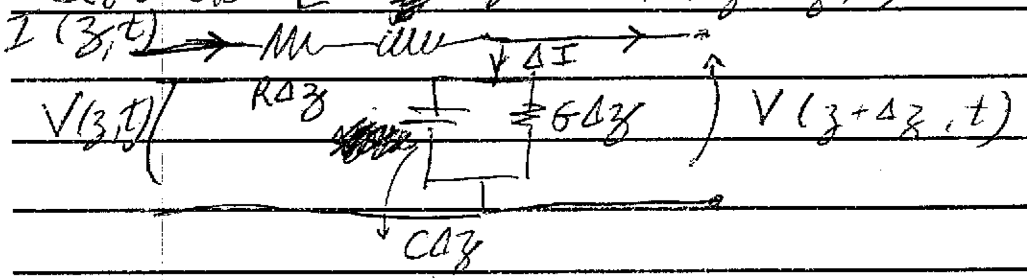
1) Determine as equações que descrevem o comportamento da tensão e da corrente em linhas de transmissão com perdas no domínio da frequência e suas respectivas soluções. Discuta as constantes envolvidas e seus impactos nas características de propagação.
2) Considere um cabo coaxial de comprimento infinito, com raio interno a, raio externo b, e meio dielétrico ideal, submetido a uma diferença de potencial V constante. Elabore a solução do campo na região do dielétrico a partir de métodos analíticos e numéricos, como diferenças finitas e/ou elementos finitos.

Politécnica UFRJ	**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO** **ESCOLA POLITÉCNICA** **DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA** **EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-205**	
CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR		
PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	**CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO**	
LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	WT78	

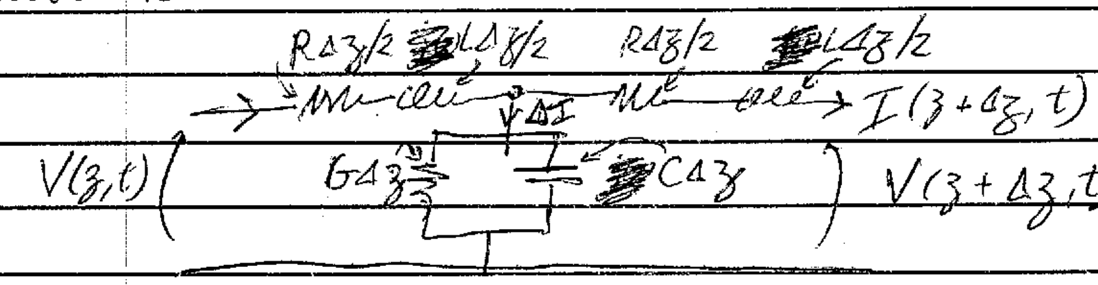
QUESTÃO Nº 1

As linhas de transmissão são meios de propagação ~~eletromag-~~ de ~~-néticos~~ ondas eletromagnéticas, podendo ser representadas atravez de circuito a parâmetros distribuidos. Por exemplo, apresenta-se abaixo o circuito "L" e o circuito "T" a parâmetros distribuidos de uma linha de transmição.

Circuito "L":



Circuito "T":



Utilizando o domínio fasorial e aplicando as leis de Kirchoff para o circuito "L", por exemplo, tem-se que:

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-205

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)

CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO: WT78

LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ
DATA: 11/11/2024

QUESTÃO Nº 1

$$V(z) - V(z+\Delta z) = (R\Delta z + j\omega L\Delta z) I(z)$$

Assim como

$$I(z) + \Delta I = I(z+\Delta z)$$

sendo $\Delta I = (G\Delta z + j\omega C\Delta z) V(z+\Delta z)$

Dividindo ambas as equações por Δz e tomando o limite de Δz para zero tem-se que:

$$\frac{\partial}{\partial z} V(z) = -(R + j\omega L) I(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} I(z) = -(G + j\omega C) V(z)$$

Derivando ambas as equações por $\frac{\partial}{\partial z}$ tem-se que:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} V(z) = (R + j\omega L)(G + j\omega C) V(z)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} I(z) = (R + j\omega L)(G + j\omega C) I(z)$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-205

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	**CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO**
LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	WT78

QUESTÃO Nº 1

Pode-se agora definir a constante de propagação γ como sendo

$$\gamma = \left[(R + j\omega L)(G + j\omega C)\right]^{1/2}$$

Sendo assim observa-se que as equaçõs desenvolvidas são equaçõs de propagação de ondas dada pelas expressões:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \gamma^2 V(z)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = \gamma^2 I(z)$$

Como as equações diferenciais acima são equaçõs de ondas são soluções destas equações

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z}$$

assim como

$$I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z}$$

QUESTÃO Nº 1

Mais ainda a constante de propagação γ pode ainda ser dada pela constante de amortecimento α e a constante número de ondas β sendo

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

Desta forma para determinarmos α e β em função dos parâmetros da Linha de transmissão faz-se:

$$\gamma^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C)$$

Sendo $\gamma^2 = \left[RG + j\omega RC + j\omega GL - \omega^2 LC \right]$

Logo

$$\gamma^2 = RG - \omega^2 LC + j\omega (RC + GL)$$

Sendo

$$|\gamma^2| = \left[(RG - \omega LC)^2 + \omega^2 (RC + GL)^2 \right]^{1/2}$$

Da mesma forma $|\gamma^2| = \alpha^2 + \beta^2$

Desta maneira tem-se que:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left[(RG - \omega LC)^2 + \omega^2 (RC + GL)^2 \right]^{1/2}$$

QUESTÃO Nº 1

Considerando agora $Re\{\gamma.\gamma\} = Re\{\gamma^2\}$

Sendo assim $Re\{\gamma.\gamma\} = RG - \omega^2 LC$

Por outro lado tem-se que $Re\{\gamma.\gamma\} = \alpha^2 - \beta^2$

Desta forma tem-se que

$$\alpha^2 - \beta^2 = RG - \omega^2 LC$$

Considerando os dois sistema de equações desenvolvidos pode-se determinar as constante de amortecimento e a constante número de ondas através dos parâmetros da linha. Sendo assim, tem-se que:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left[(RG - \omega LC)^2 + \omega^2 (RC + GL)^2\right]^{1/2}$$

e

$$\alpha^2 - \beta^2 = RG - \omega^2 LC$$

QUESTÃO Nº 1

Somando-se as duas equações tem-se que

$$2\alpha^2 = RG - \omega^2 LC + \left[(RG - \omega LC)^2 + \omega^2 (RC + GL)^2\right]^{1/2}$$

Desta forma a constante de amortecimento é dada, através dos parâmetros de linha de ~~transm~~ transmissão, por:

$$\alpha = \left[\frac{RG - \omega^2 LC}{2} + \frac{1}{2}\left[(RG - \omega LC)^2 + \omega^2 (RC + GL)^2\right]^{1/2}\right]^{1/2}$$

~~Mais adiante com equações $\alpha^2+\beta^2$ e $\alpha^2-\beta^2$, [illegible]~~
~~pode-se de~~

Subtraindo agora $\alpha^2 + \beta^2$ de $\alpha^2 + \beta^2$ tem-se que é possível determinar o número de onda β, logo:

$$2\beta^2 = -RG + \omega^2 LC + \left[(RG + \omega LC)^2 + \omega^2 (RC + GL)^2\right]^{1/2}$$

Politécnica UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-205

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	**CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO**
LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	WT78

QUESTÃO Nº 1

Desta forma o número de onda β é dado através da expressão:

$$\beta = \left[\frac{\omega^2 LC - RC}{2} + \frac{1}{2}\left[(RG + \omega LC)^2 + \omega^2 (RC + GL)^2 \right]^{1/2} \right]^{1/2}$$

A constante de amortecimento é responsável pelo decaimento do sinal de onda ao longo a linha de transmissão. Já a constante β, o número de ondas, impacta na fase da onda propagada. Percebe este fato analizando-se as equações de propagação das variáveis $V(z)$ e $I(z)$.

Por simplicidade supondo uma onda eletromagnética propagando-se numa linha de transmissão apenas ~~para~~ a no sentido positivo ou seja:

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z}$$

e $$I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z}$$

Sendo assim

$$V(z) = V_0^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

$$I(z) = I_0^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	WT78

QUESTÃO Nº 1

~~Sendo~~ Analinasando as expressão apresentada

$$|V(z)| = V_0^+ e^{-\alpha z}$$ ou seja a medida que a onda se propaga ao longo da linha de transmissão o valor do seu módulo ~~cai de~~ ~~e~~ é reduzido de $e^{-\alpha z}$.

Da mesma forma analizando o ângulo de $V(z)$ tem-se que:

$$\angle V(z) = -\beta z$$

onde nota-se que o angulo do ~~tes~~ sinal de tensão muda a medida que a onda se propaga pela linha de transmissão.

Considerando agora uma linha de transmissão finita de ~~tamanho~~ comprimento d. Onde tem-se em um de seu terminais conectado uma carga Z_0 e no outro terminal tem-se uma fonte com sua impedandia de thevenin

* Considerar este texto na página 10

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-205

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	W7 78

QUESTÃO Nº 1

~~Por~~ Alem disso deve-se determinar a impedância caracteristica de uma linha de transmissão sendo esta impedancia dada pela razão entre a tensão e corrente incidentes

$$Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-}$$

Aplicando as soluções das equações de onda em $\frac{\partial V(z)}{\partial z} = (R + j\omega L)\, I(z)$. Considerando apenas as ondas ~~[illegible]~~ incidentes tem-se que:

$$-\gamma V_0^+ e^{-\gamma z} = -(R + j\omega L)\, I_0^+ e^{-\gamma z}$$

sendo assim

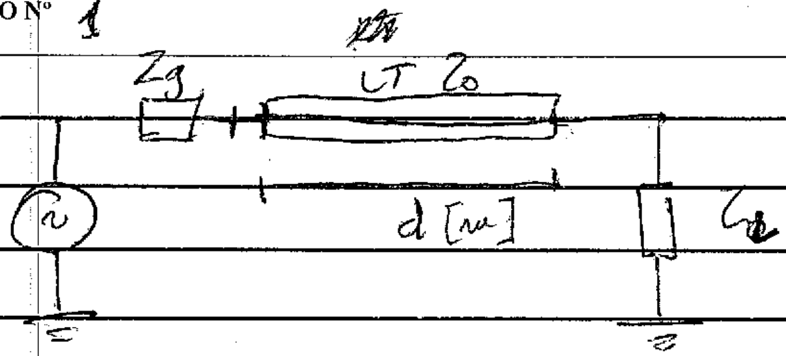
$$Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+} = \frac{R + j\omega L}{\gamma}$$

Da mesma forma tem-se que $\frac{\partial I}{\partial z} = -(G + j\omega C) V$

$$-\gamma I_0^+ e^{-\gamma z} = -(G + j\omega C) V_0^+ e^{-\gamma z}$$

$$Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+} = \frac{\gamma}{G + j\omega C}$$

QUESTÃO Nº 1



Por simplicidade e sem perda de generalidade faz-se $l = -z$. Sendo assim considera-se aqui a onda positiva a que se propaga da carga para a fonte sendo assim tem-se que:

$$V(z) = V_0^+ e^{\gamma l} + V_0^- e^{-\gamma l}$$

$$I(z) = I_0 e^{\gamma l} + I_0^- e^{-\gamma l}$$

Sendo o índice de reflexão dado pela razão entre a onda refletida pela onda incidente faz-se que:

$$\Gamma_c = \frac{V_0^-}{V_0^+}$$

Para isso calculamos a tensão no terminal da carga.

QUESTÃO Nº 1

logo tem-se que

$$V_0^+ + V_0^- = \frac{Z_L}{Z_0}(V_0^+ - V_0^-)$$

$$(V_0^+ + V_0^-)Z_0 = Z_L(V_0^+ - V_0^-)$$

$$V_0^+ Z_0 + V_0^- Z_0 = Z_L V_0^+ - Z_L V_0^-$$

$$V_0^+(Z_0 - Z_L) = -V_0^-(Z_0 + Z_L)$$

sendo desta forma

$$\Gamma_r = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Pode agora determinar a constante de propagação ao longo de toda a linha

$$\Gamma(l) = \frac{V_0^-(l)}{V_0^+(l)} = |\Gamma_r| e^{-2\alpha l} . e^{-2\beta l + \theta_r}$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	WT78

QUESTÃO Nº 1

Sendo a razão da onda estacionária dada pela razão entre os valores máximos e mínimos de tensão

$$SWR(l) = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{1+|\Gamma(l)|}{1-|\Gamma(l)|}$$

Sendo o valor máximo encontrado quando

$$\beta l_{max} = 2n\pi + \theta_\Gamma$$

$$l_{max} = \frac{2n\pi + \theta_\Gamma}{\beta}$$

assim como o valor de tensão mínima é encontrado em

$$l_{min} = \frac{(2n+1)\pi + \theta_\Gamma}{\beta}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-205

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	WT78

QUESTÃO Nº 2

Para o desenvolvimento do problema em questão faz-se necessário o desenvolvimento da equação de ~~Poisson~~ laplace para o potencial escalar elétrico para isso tem-se que: através da equações de Maxwell:

$\nabla \cdot B = 0$ $\qquad \nabla \cdot D = \rho_v$

$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$ $\qquad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

Além disso para o caso eletrostático em questão tem-se que

$E = -\nabla V_e$, sendo E o campo elétrico e V_e o potencial escalar elétrico

Logo utilizando-se da lei de Gauss do campo elétrico tem-se que

$$-\nabla \cdot (\epsilon \nabla V_e) = \rho_v$$

Para o caso em que $\rho_v = 0$ tem-se que

$-\nabla \cdot (\epsilon \nabla V_e) = 0$ considerando um meio linear, isotrópico e homogêneo, obtém-se a equação de laplace a ser resolvida.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-205

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

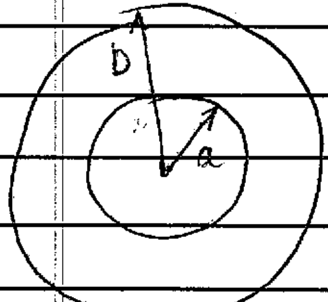
PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	WT78

QUESTÃO Nº 2

$-\epsilon\nabla^2 V = 0$

De acordo com o teorema da unicidade, para que a solução desta equação de Laplace seja única deve-se determinar as condições de fronteira do problema.

Sendo o condutor ~~[illegible]~~ submetido a uma diferença de potencial igual a V desta forma tem-se que:



Sendo $V(a) = V$ a condição de fronteira do problema

Além disso tem-se que $V(b) = 0$ sendo a segunda condição de fronteira necessária para solucionar o problema.

Inicialmente abordando o problema através do método de diferença finita tem-se que realizar os seguinte passos para a solução do problema:

i) Dividir o problema em diversos nós

ii) Discretizar a equação diferencial do problema passando a para o método de diferença finitas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-205

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	WT78

QUESTÃO Nº 2

iii) Desenvolver a ~~ede~~ equação em diferenças finitas
iv) Resolver o sistema matricial

Para o sistema em questão considerando um sistema 2D (x,y) ~~tou~~ bem como considerando o método de diferença finitas central tem-se que

Metodo central para segunda derivada:

Utilizando a série de Taylor podemos expandir a variavel série até o segundo termo:

$$f(x+\Delta x) = \sum \frac{f^{n}(x_0)}{n!} \Delta x + f(x_0)$$

Desta forma tem-se que

$$f(x+\Delta x) = f' \Delta x + \frac{f''(x_0)\Delta x^2}{2} + f(x_0)$$

$$f(x_0 - \Delta x) = -f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2} \Delta x^2 + f(x_0)$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	WT 78

QUESTÃO Nº 2

Somando-se as duas equações tem-se que:

$$f(x_0+\Delta x) + f(x_0-\Delta x) = f''(x_0)\Delta x^2 + 2f(x_0)$$

Sendo assim atravez do método de diferenças finitas central tem-se que

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+\Delta x) - 2f(x_0) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2}$$

Por facilidade pode-se utilizar a seguinte notação

$$f''(x_0) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}$$

Sendo a equação de laplace

$$-\epsilon\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right] = 0$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA H-227A - BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	WT78

QUESTÃO Nº 2

Logo aplicando o método de diferenças finitas central tem-se que:

$$\frac{V_{i+1}^{j} - 2V_i^{j} + V_{i-1}^{j}}{\Delta x^2} + \frac{V_i^{j+1} - 2V_i^{j} + V_i^{j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

Fazendo $\Delta x = \Delta y = h$ tem-se que

$$V_{i+1}^{j} - 4V_i^{j} + V_{i-1}^{j} + V_i^{j+1} + V_i^{j-1} = 0$$

Desta forma o potencial em cada nó determinado do problema será igual à:

$$V_i^{j} = \frac{V_{i+1}^{j} + V_{i-1}^{j} + V_i^{j+1} + V_i^{j-1}}{4}$$

Sendo a condição de fronteira aplicada aos pontos em que $\sqrt{x^2 + y^2} = a$ para estes pontos o valor do potencial será V, já para os pontos $\sqrt{x^2+y^2} = b$ o valor do potencial elétrico será 0.

QUESTÃO Nº 2

Resolvendo agora o mesmo problema através do método dos momentos (MoM).

O MoM possui duas abordagens possíveis a primeira visa transformar um funcional de energia num sistema matricial através dos métodos variacionais. Já a segunda abordagem é a utilização de resíduos ponderados. ~~Neste caso~~ sendo esta metodologia mais geral e por isso a que será aplicada aqui.

O MoM possui 5 macro etapas.

i) Desenvolver as equações diferenciais do problema e determinar o operador L ($L\phi = g$)
ii) Escolher as funções de base para o problema em questão
iii) Escolher as funções teste que irão minimizar o resíduo
iv) Montar a matriz de solução
v) Resolver o sistema.

QUESTÃO Nº 2

Vamos agora de forma detalhada aplicar os passos listados anteriormente.

i) A equação do problema em questão já está determinada sendo esta a equação de Laplace

$$\nabla^2 V_e = 0$$

Para esta equação tem que o operador "L" é:

$$L = \nabla^2$$

Sendo assim

$$L V_e = 0$$

Agora aproxima-se a solução do problema para uma solução do tipo

$$\tilde{V}_e = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n$$

para ~~...~~ $N = \infty$ a função de aproximação será exatamente a função V_e. Porém como N é um número finito então tem-se que

$$L[V_e - \tilde{V}_e] = R$$ sendo R o resíduo da diferença entre V_e e $\tilde{V}_e$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	**CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO**
LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	WT78

QUESTÃO Nº 2

Desta forma, para que o valor de R vá a zero faz-se um produto interno com uma função teste W_m tal que

$$\langle W_m, R\rangle = \int_{\Omega} W_m R \, d\Omega = 0$$

Sendo assim

$$\langle W_m, L V_e - L \tilde{V}_e\rangle = 0$$

logo $\langle W_m, L V_e\rangle = \langle W_m, L \tilde{V}_e\rangle$

Sendo assim a funções teste é responsável por ponderar o resíduo R de tal maneira que o ~~seu~~ produto interno $\langle W_m, R\rangle$ seja zero.

Sendo assim precisa-se escolher as funções de W_m. Para isso existem 3 métodos muito utilizados na literatura.

A) Método da colocação ou point-matching

Neste caso $W_m = \delta(x_i, x_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = 1 \end{cases}$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	WT78

QUESTÃO Nº 2

B) Método dos subdomínios

Neste caso w_m é definido num intervalo do domínio e em todo resto $w_m = 0$, ou seja:

$$w_m = \begin{cases} 1 & x_{m-1} < x < x_{m+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

c) Método de Galerkin: neste método $w_m = f_m$ ou seja a função teste é a ~~mesma~~ igual à da função de base.

$$w_m = f_m$$

Para o problema em questão utiliza-se $w_m = f_m$ ou seja o método de Galerkin

Agora deve-se escolher a função de base tal que esta função de base atenda as condições de fronteira do problema

Desta forma $f_n(x,y)$ deve ser uma função que em para todo valor de $x^2+y^2=a^2$ f_n valerá V e para todo valor de $x^2+y^2=b^2$ f_n valerá 0.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-205
CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	WT78

QUESTÃO Nº 2

Determinada a ~~conde~~ função f_n e a função teste escolhe-se a quantidade de funções para se aproximar o problema tal que se $N=2$ tem-se

$\tilde{V}e = u_1 f_1 + u_2 f_2$ assim como w_1 e w_2 sendo u_1 e u_2 constantes a serem determinadas

Com as funções determinadas monta-se ~~o~~ sistema matricial que para o caso escolhido será

$$\begin{bmatrix} \langle w_1, L\tilde{V}e_1\rangle & \langle w_1, L\tilde{V}e_2\rangle \\ \langle w_1, L\tilde{V}e_1\rangle & \langle w_2, L\tilde{V}e_2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

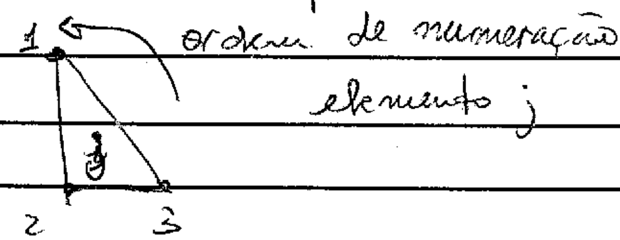
Resolvendo-se o sistema matricial encontra-se u_1 e u_2 determinando a solução do problema.

Desenvolvendo agora o problema através do método dos elementos finitos. De forma macro o método dos elementos finitos possui 4 grandes etapas:

I) ~~Obter~~ Discretização do problema
II) Desenvolvimento das equações para os elementos
III) Montagem da matriz Global, IV) Resolução matricial do sistema

QUESTÃO Nº 2

A discretização do método de elementos finitos em 2D pode ser dada através de elementos triangulares ou através de elementos quadrados. Utilizando elementos triangulares tem-se que



A função base é dada por $\tilde{V}_e = \sum V_e^{(j,N)}$ ou seja o potencial no elemento é a soma dos potenciais em cada nó. Supondo uma função de aproximação linear tem-se que

$$V^{(j,N)}_{(x,y)} = ax + by + c$$

Sendo assim pode-se montar um sistema matricial para o elemento tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{(j,1)} \\ V^{(j,2)} \\ V^{(j,3)} \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-205
CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	WT78

QUESTÃO Nº 2

Resolvendo o sistema matricial tem-se que

$$\tilde{V}_e = \sum_{i=1}^{3} N_i(x_j, y_j)\, V_e^{(i,N)}$$

Onde $N_i(x_j, y_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

Aplicando agora o mesmo método dos resíduos já explanado tem-se que

$$\langle w_m, L\tilde{V}_e \rangle = 0$$

Neste caso utiliza-se o método de Galerkin onde $w_m = \tilde{V}_e$

Sendo assim tem-se que:

$$\langle w_m, \nabla^2 \tilde{V}_e \rangle = 0 = \int_\Omega w_m\, \nabla\cdot(\nabla V_e)\, d\Omega$$

Lembrando da propriedade

$$\nabla\cdot(f\vec{G}) = \nabla f\cdot\vec{G} + f\,\nabla\cdot\vec{G}$$

$$\int \nabla\cdot(f\vec{G})\, dV = \int \nabla f\cdot\vec{G}\, dV + \int f\,\nabla\cdot\vec{G}\, dV$$

Politécnica UFRJ	**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO** **ESCOLA POLITÉCNICA** **DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA** **EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-205**

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	**CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO**
LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	WT78

QUESTÃO Nº 2

Utilizando o teorema da ~~stokes~~ divergência tem-se que:

$$\oint_{\Gamma} f\vec{G}\cdot\vec{n}\,d\Gamma = \int \nabla f\cdot\vec{G}\,dV + \int f\,\nabla\cdot G\,dV$$

$$\oint f\vec{G}\cdot n\,d\Gamma - \int \nabla f\cdot\vec{G}\,dV = \int f\,\nabla\cdot G$$

Sendo $f = w_m$ e $G = \nabla V_e$ tem-se que

$$0 = \underbrace{\oint w_m \nabla V_e\cdot\vec{n}\,d\Gamma}_{\text{condição de Neumann}} - \int_{\Omega} \nabla W_m\cdot\nabla V_e\,d\Omega = \int w_m\,\nabla\cdot(\nabla V_e)\,d\Omega$$

~~matriz da~~

equação de Laplace na forma fraca

Aplicando as condições estabelecidas para $\tilde{V}_e$ e para W_m monta-se o sistema matricial para o elemento ou seja

Condições de Neumann

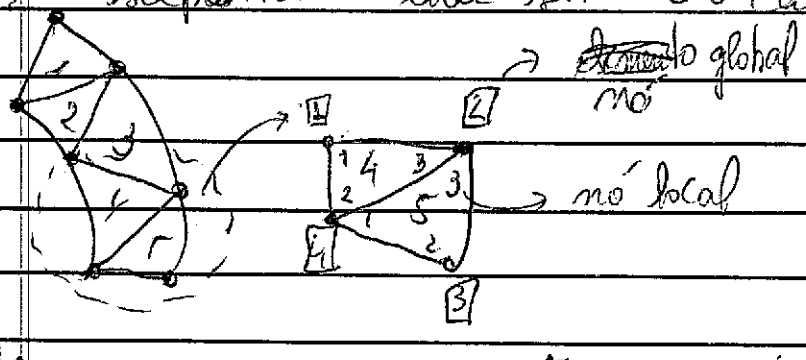
$$\underbrace{[M]_{3\times3}}_{\text{matriz principal}}[\tilde{V}_e]_{3\times1} - [N]_{3\times3}[\tilde{V}_e]_{3\times1} = 0$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	WT78

QUESTÃO Nº 2

Percebe-se que a condição de Neumann é uma condição natural do problema sendo derivada pelas das expressões de forma fraca da equação de laplace.

Após a montagem da matriz do elemento faz-se necessário a montagem da matriz global onde neste caso utiliza-se do princípio da superposição onde em casos de se ter um nó que divide dois elementos as contribuições dos dois nós são considerada no nó em questão. Por exemplo, para o problema em questão suponha um seto do cabo coaxial



Na caso o caso em questão apresentado acima tendo como exemplo os nós 4 e 5 faz-se

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-205

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)

CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO

LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ
DATA: 11/11/2024

WT78

QUESTÃO Nº 2

	nó local			
elemento	1	2	3	
4	1	4	2	nó Global
5	4	3	2	

Sendo assim os elementos da matriz Global

M_{11} sera igual à o elemento $M_{11}^{(4)}$ apenas sendo localmente $M_{11}^{(4)} = M_{11}$

Já o elemento matricial M_{22} terá a contribuição dos elementos 4 e 5 sendo assim

$$M_{22} = M_{22}^{(4)} + M_{22}^{(5)}$$

Após a matriz Global ser montada e as condições de Dirichlet sera aplicadas. O sistema matricial está pronto para ser resolvido por métodos com escalonamento de Gauss-Seidel.

Politécnica UFRJ	**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO** **ESCOLA POLITÉCNICA** **DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA** **EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-205**

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	**CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO**
LOCAL: SALA H-227A - BLOCO H - ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	WT78

QUESTÃO Nº 2

Para a solução analítica do problema pode-se utilizar a técnica de separação de variáveis

Seja $V(x,y) = v_1(x)\, v_2(y)$ onde $V(a) = V$

$V(0) = 0$

Desta forma tem-se que

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_1(x)\, v_2(y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_2(y)\, v_1 = 0$$

Logo

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_1(x)}{v_1} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_2(y)}{v_2} = 0$$

Sendo $K_1^2 = \dfrac{\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}}{v_1}$ e $K_2^2\ \dfrac{\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}}{v_2}$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA H-227A– BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 11/11/2024	WT78

QUESTÃO Nº 2

Onde

$$K_1^2 = -K_2^2$$

Desta forma a solução para o problema é dada por

$$V_1(x) = A_1 e^{-jK_1x} + A_2 e^{+jK_1x}$$

$$V_2(x) = B_1 e^{-jK_2x} + B_2 e^{jK_2x}$$

Onde aplicando-se as condições de fronteira do problema pode-se determinar as constantes A_1, B_1, A_2, B_2.

Sendo a solução geral dada por

$$V(x,y) = \left(A_1 e^{-jK_1x} + A_2 e^{jK_1x}\right)\left(B_1 e^{-jK_2x} + B_2 e^{K_2x}\right)$$