



UFRJ

X952

Politécnica
UFRJ

CONCURSO DE PROVAS E TÍTULOS DO MAGISTÉRIO SUPERIOR
EDITAL N° 54 DE 30/01/2024 – PUBLICADO NO DOU N° 24 DE 02/02/2024

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

VAGA MC-204 – SETOR DE CIRCUITOS ELÉTRICOS E SISTEMAS LINEARES

DIA: 04 de novembro de 2024.

LOCAL: Sala 227A - Bloco H - Escola Politécnica/CT/UFRJ

CADERNO DE QUESTÕES - PROVA ESCRITA

- 1) Discorra amplamente sobre Utilização de transformada de Laplace na análise de circuitos, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um circuito de ordem igual ou maior a 2.
- 2) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando função de transferência, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.
- 3) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando equações de estado, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	X952

QUESTÃO Nº 1

Na análise de circuitos elétricos são utilizadas diferentes ferramentas matemáticas. As soluções dos circuitos elétricos utilizam respostas em domínio do tempo e no domínio de frequência.

A Transformada de Laplace é uma ferramenta matemática muito poderosa utilizada em diferentes áreas da engenharia para a resolução de problemas relacionados à circuitos elétricos, a sistemas de controle, eletrônica, etc.

A Transformada de Laplace é definida como:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (1)$$

onde s é um número complexo definido como $s = \sigma + j\omega$.

Assim, a variável s pode ser representado no plano complexo, como apresentada na Figura abaixo.

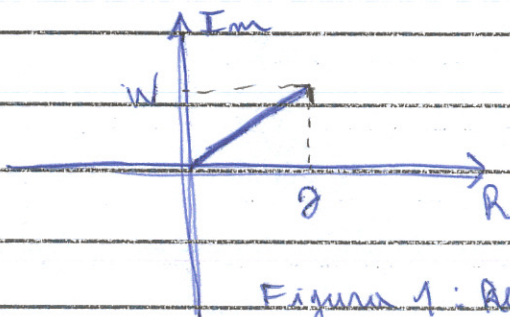


Figura 1: Representação da variável s .

Desta forma, para a realização da Transformada de

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	X 952

QUESTÃO Nº 1

Laplace, inicialmente, tem-se uma função no domínio do tempo $f(t)$. Esta função $f(t)$ é aplicada a fórmula apresentada na equação (1), e a solução é a equação no domínio s .

Para a análise de circuito utilizando a Transformada de Laplace, segue as seguintes passas:

- 1- ~~An~~ Ver o circuito no domínio do tempo.
- 2- Transformar as variáveis do domínio de tempo em domínio s .
- 3- Resolver o circuito com as variáveis no domínio s .
- 4- Aplicar a Transformada de Laplace Inversa, para voltar no domínio do tempo.

A solução ou a análise do circuito utilizando a Transformada de Laplace segue os mesmos critérios de análise ~~usando os métodos~~ usados no domínio do tempo. Considerando o circuito linear podem ser aplicadas a Lei de Ohm, Lei de Kirchhoff da Tensão (LKC), Lei de Kirchhoff dos correntes (LKC), análise nodal, análise de malha, Teorema da superposição, Transformação de fontes,



PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)

CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO
CANDIDATO

LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ

DATA: 04/11/2024

X 952

QUESTÃO Nº 1

Teorema de Thevenin e Norton, etc.

Para a resolução de circuitos utilizando a Transformada de Laplace, para que a solução seja mais rápida, utiliza as tabelas com o conhecimento prévio dos principais pulsos no domínio do Tempo como, degrau, impulso, dos pulsos trigonométricos (sen, cos, tang, etc), etc

Assim desta forma é importante ter o conhecimento dos principais Transformada de Laplace dos pulsos mais comuns utilizados em circuitos.

A Transformada de Laplace dos principais elementos encontrados nos circuitos (Resistor, capacitor e indutor) pode ser vista abaixo

Elemento	Domínio de Tempo	Domínio de Laplace
Resistor	R	R
Indutor	$j\omega L$	sL
capacitor	$1/j\omega C$	$1/sC$

Tabela 1: Transformada de Laplace dos principais elementos do circuito.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	X952

QUESTÃO Nº 1

A transformação de Laplace é utilizada em vastas aplicações de circuitos elétricos. É utilizada na resolução de circuitos de primeira ordem sem fonte, apresentados na Figura 2.

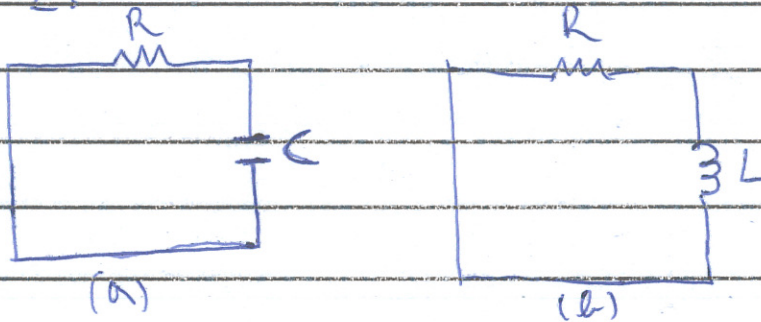


Figura 2: circuito de primeira ordem:

a) circuito RC.

b) circuito RL.

Também pode ser utilizada para análise da transiente dos circuitos da Figura 2, aplicando um degrau, impulso, rampa em um determinado instante do tempo, tempo como apresenta a Figura 3.

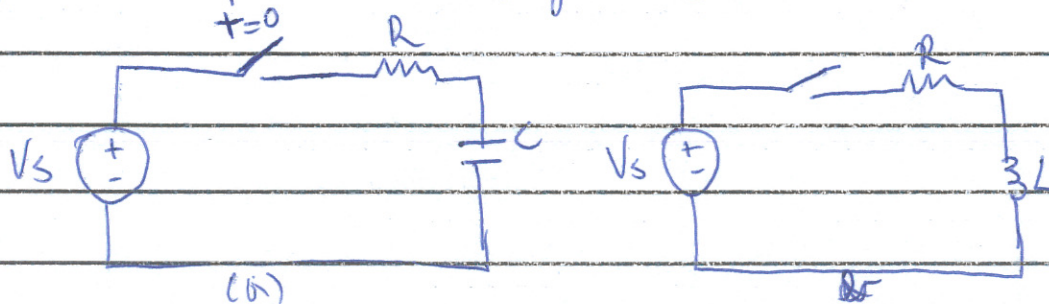


Figura 3: Figura de primeira ordem com fonte:

a) circuito RC.

b) circuito RL.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A - BLOCO H - ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	X952

QUESTÃO Nº 1

Nos iniciais de um circuito de primeira ordem a resposta do sistema é sempre uma função $\frac{a}{1+bs}$ sendo a e b representam os elementos do circuito.

A Transformada de Laplace é aplicada também a circuitos de segunda ordem, RLC série e RLC paralelo, e sem e com fonte.

Por exemplo a seguir, é um circuito RLC série sem fonte.

Considera-se que no instante $t=0$, os elementos armazenadores de energia estejam descarregados.

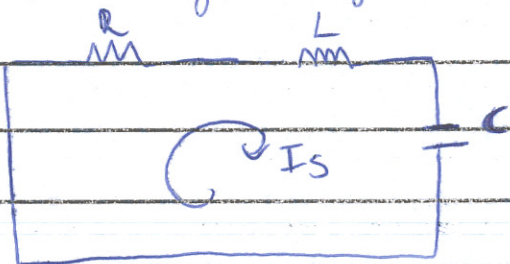


Figura 4 - Circuito RLC série

O resistor é representado por R , capacitor por $1/sC$ e indutor, LS .

A equação do circuito da Figura 4, aplicando LK é dada por:

$$RI_s + LSI_s + \frac{1}{sC} \cdot I_s = 0$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)

CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO
CANDIDATO

LOCAL: SALA 227A - BLOCO H - ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ

DATA: 04/11/2024

X952

QUESTÃO Nº 1

Multiplicando toda a equação por s , temos:

$$sR I_s + s^2 L I_s + \frac{1}{C} I_s = 0$$

Rescrevendo:

~~s^2~~

$$s^2 L I_s + sR I_s + \frac{I_s}{C} = 0$$

~~I_s~~ Dividindo por L e colocando I_s em evidência:

$$I_s \left(s^2 + \frac{sR}{L} + \frac{1}{RC} \right) = 0$$

$$I_s(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{sR}{L} + \frac{1}{RC}}$$

Da mesma forma que foi aplicado para análise em regime transitório, a Transformada de Laplace é aplicada para análise de circuito em regime permanente.

Pode ser aplicada, tanto para circuitos em corrente contínua (CC), quanto para análise de circuitos em corrente alternada (CA).

A Transformada de Laplace também é amplamente utilizada em sistemas de controle, em que utilizam a Transformada para o levantamento da função de transferência.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	X952

QUESTÃO Nº 1

do circuito para posteriormente ser aplicado o sistema de controle. Uma aplicação bastante relevante é o uso da Transformada de Laplace para a modelagem de conversores de eletrônica de potência. A partir da solução, é utilizada a função de transferência para o projeto dos controladores a ser aplicados nos conversores com a função de transferência no domínio s é possível utilizar os métodos de controle como lugar dos polos, diagrama de Bode para a propensão do controlador.

Concluindo, a Transformada de Laplace é uma ferramenta poderosa e bastante utilizada na análise de circuito, principalmente para a obtenção da função de transferência que pode ser utilizada em diferentes áreas e diferentes parâmetros para analisar o sistema.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	X952

QUESTÃO Nº 2

A análise de circuitos elétricos apresenta muitos recursos para a solução dos circuitos. Os principais métodos para a análise de circuitos elétricos têm como premissa sistemas lineares.

Os métodos como análise nodal, análise de malhas, Teorema da Superposição, Fte Teorema de Thévenin e Norton, entre outros métodos considera sistemas lineares.

Desta forma, é importante o conhecimento de Modelos de Sistemas lineares e os recursos para a sua solução.

Existem vários recursos matemáticos que podem ser utilizados para a determinação de modelos de sistemas lineares como a transformada de Laplace, Transformada de Fourier, Transformada Z, etc. Normalmente esses recursos matemáticos apresentam como solução as funções de transferência.

As funções de transferência são equações que representam a dinâmica de um modelo de um sistema.

O diagrama da figura 1 apresenta a representação do sistema.

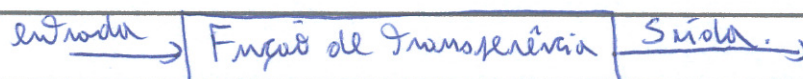


Figura 1: Representação de sistemas lineares utilizando a função de transferência.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	X952

QUESTÃO Nº 2

O modelo de sistemas lineares tem a(s) entrada(s) e a função de transferência representa a dinâmica do modelo. A saída é que a entrada causou a função de transferência do modelo de sistemas lineares.

A representação da função de transferência pode ser apresentada no domínio do ~~tempo~~ ~~tempo~~ ~~tempo~~ frequência tempo ou do domínio da frequência.

Existem situações em que o modelo que representa o sistema é um modelo não linear. Nestes casos, é necessário a linearização do sistema para posteriormente ser utilizados os métodos para a análise do sistema.

A linearização do sistema representa uma aproximação do modelo não linear para que possa ser utilizados os parâmetros conhecidos para a análise do sistema.

Quando em consideração, a análise de circuitos elétricos, pode considerar, por exemplo, os circuitos RL e RC, que são circuitos de primeira ordem. Esses circuitos podem ser representados através da função de transferências.

Considere a Figura 2, com um circuito RC.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	X952

QUESTÃO Nº 2

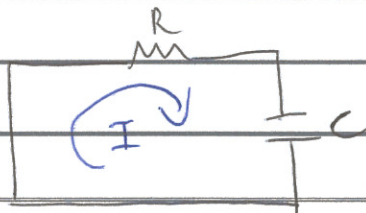


Figura 2: circuito RC.

considerando que no instante $t = 0$, o capacitor encontra-se carregado, pode-se utilizar as ferramentas matemáticas para a representação do circuito usando a função de transferência.

Utilizando a transformada de Laplace, temos:

$$RI + \frac{1}{sC} \cdot I = 0,$$

multiplicando por s , temos: $sRI + \frac{I}{C} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow I \left(s + \frac{1}{RC} \right) = 0$$

$$\Rightarrow T(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \quad \sim) \text{ Função de Transferência do circuito da Figura 2.}$$

Este mesmo circuito também pode ser representado com a função de transferência no domínio da frequência.

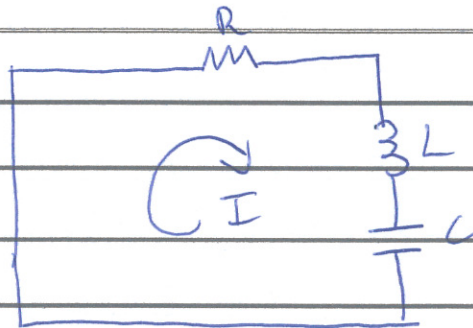
Fazendo $C = \frac{1}{j\omega C}$, temos:

$$RI + \frac{1}{j\omega C} \cdot I = 0 \quad \Rightarrow \quad I(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	X952

QUESTÃO Nº 2

Para um sistema de segunda ordem, considere um circuito RLC paralelo similar em parte.



Utilizando a Transformada de Laplace temos:

$$RI + LSI + \frac{1}{C}I = 0$$

Resolvendo a equação, temos que:

$$I(s) = \frac{1}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{RC}} \quad \sim) \text{ Função de transferência do sistema de segunda ordem.}$$

A equação acima pode ser comparada com a forma canônica de segunda ordem dada por

$$F(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	X952

QUESTÃO Nº 2

A partir da função de transferência pode-se determinar o amortecimento (ζ) da função de transferência e a frequência não natural (ω_0).

Assim, qualquer modelo de sistemas lineares podem ser representados através da função de transferência. Desta forma, é possível analisar com mais facilidade a função ou modelo, prever o seu comportamento, projetar as respostas desejadas e utilizar métodos lineares para a resolução de sistemas lineares.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)

CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO
CANDIDATO

LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ

DATA: 04/11/2024

X952

QUESTÃO Nº 3

As equações de estado representa uma ferramenta bastante útil e importante na representação de Modelos de sistemas lineares.

As equações de estados são representados através da matriz de estado ~~de~~ apresentada na equação a seguir:

$$\dot{y} = Ax + B$$

$$z = Cy + D$$

A, B, C e D representam as matrizes, onde x é a variável de entrada e y é a variável de saída.

As equações de estados representa os sistemas que contém elementos com derivada e integral

Em circuitos elétricos, as equações de estado são utilizadas na resolução de circuitos com elementos armazenadores de Energia, como capacitor e Indutor. O uso de equação de estados deve-se a presença de derivadas e integral nos elementos, mostrado na Tabela 1.

Elementos	Tensão	corrente
capacitor	$v_c = \frac{1}{C} \int i_c dt$	$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$
Indutor	$v_L = L \frac{di_L}{dt}$	$i_L = \frac{1}{L} \int v_L dt$

Tabela 1: tensão e corrente dos elementos armazenadores de energia.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	X952

QUESTÃO Nº 3

As variáveis de estado em geral é escolhida dos elementos que contém a derivada. No caso, dos elementos armazenadores de energia, tensão no indutor e corrente no capacitor.

A partir da solução das equações de estados pode-se realizar a análise do sistema como a controlabilidade e a observabilidade do sistema. Com estas informações do sistema, pode-se projetar a análise do controle, os estados do sistema etc.

Os modelos de sistemas lineares através da equação de estados é uma ferramenta bastante importante quanto tem-se diferentes tipos de sistema, desde os SISO ("Single Input Single Output") até sistemas MIMO ("Multiple Input Multiple Output") que são sistemas de controle de várias variáveis.

Existem vários exemplos de sistemas lineares que são aplicados as equações de estados. Um exemplo é o circuito RLC. Outros exemplos envolvem sistemas com molas e outros elementos armazenadores de energia, que são representados pela derivada.