$V -$

UFRJ

Politécnica UFRJ

CONCURSO DE PROVAS E TÍTULOS DO MAGISTÉRIO SUPERIOR
EDITAL N° 54 DE 30/01/2024 – PUBLICADO NO DOU N° 24 DE 02/02/2024

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

VAGA MC-204 – SETOR DE CIRCUITOS ELÉTRICOS E SISTEMAS LINEARES

DIA: 04 de novembro de 2024.

LOCAL: Sala 227A - Bloco H - Escola Politécnica/CT/UFRJ

CADERNO DE QUESTÕES - PROVA ESCRITA

1) Discorra amplamente sobre Utilização de transformada de Laplace na análise de circuitos, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um circuito de ordem igual ou maior a 2.

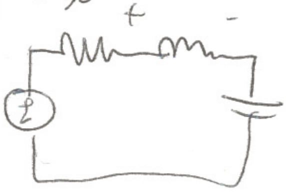
2) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando função de transferência, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.

3) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando equações de estado, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.

$V_{12} = V -$

V_{12}

$V - V_{12} - V_{23} - V_{30} = 0$



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

Politécnica UFRJ

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	V5F8

QUESTÃO Nº 1

Utilização da transformada de Laplace
na Análise de Circuitos

Até aqui, o leitor foi apresentado às principais técnicas de análise de circuitos em corrente contínua no domínio do tempo. Vimos também que em análises de circuitos em corrente alternada, o domínio da frequência através da transformação fasorial, em regime permanente, é uma poderosa ferramenta de análise, transformando um problema integro-diferencial em algébrico. Contudo, a análise fasorial é limitada apenas ao regime permanente (não sendo possível analisar o regime transitório do circuito) e ao sinal de excitação senoidal. Neste capítulo, o leitor será apresentado à transformada de Laplace, onde o uso desta ferramenta, também no domínio do tempo, permite encontrar a resposta completa do circuito (SLIT) para qualquer sinal de excitação.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VS F8

QUESTÃO Nº 1

A transformada de Laplace:

A transformada de Laplace de um sinal $x(t)$ é definida como:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \qquad (1)$$

onde s é um número complexo dado por:

$$s = \sigma + j\omega$$

Ainda, podemos definir a transformada inversa de Laplace como

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} X(s) e^{st} ds$$

onde simbolicamente o par:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \qquad \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} X(s) e^{st} ds$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	**CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO**
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	V5F8

QUESTÃO Nº 1

é chamado de par de transformadas bilateral de Laplace. O leitor atento, já deve ter notado que através desse par é possível mapear um sinal $x(t)$ no domínio da frequência, ou vice-versa. Ou seja:

domínio do tempo

$$\begin{tikzcd} x(t) \arrow[r, bend left, "\mathcal{L}\{x(t)\}"] & X(s) \arrow[l, bend left, "\mathcal{L}^{-1}\{X(s)"] \end{tikzcd}$$

domínio da frequência

Vamos ao seguinte exemplo:

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace temos:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int^{\infty} e^{-at-st}dt =$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt = -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 1

~~transformada~~ é muito importante que a integral da transformada de Laplace convirja para algum valor. Em nosso exemplo temos que:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \left.\begin{matrix}0\\ \text{ou}\\ \infty\end{matrix}\right|_{t=\infty} - \left(-\left.\frac{e^{-t(s+a)}}{s+a}\right|_{t=0}\right)$$

se $s+a > 0$ a primeira parcela irá tender a zero. ou seja, para a transformada de Laplace não divergir temos a seguinte condição

$$s > -a$$

Essa região no plano complexo onde a transformada de Laplace de $x(t)$ existe é chamada de região de convergência.

transformada Unilateral de Laplace:

Para entendermos o uso da transformada uni-

Politécnica UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 1

lateral de Laplace, vamos ao seguinte exemplo:

$$x(t) = -e^{-at} u(-t)$$

então, a transformada de Laplace é dada por:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at} u(-t) e^{-st}\, dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-t(s+a)}\, dt$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \left.\frac{e^{-t(s+a)}}{s+a}\right|_{t=0} - \left.\frac{e^{-t(s+a)}}{s+a}\right|_{t=-\infty}$$

O leitor atento deve observar que o segundo termo dessa transformada irá convergir se e somente se:

$$s + a < 0$$

então a região de convergência do sinal $x(t)$ será $s < -a$.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	**CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO**
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 1

então para esses dois casos específicos temos:

(sinal causal)

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} \frac{1}{s+a} \xleftarrow{\mathcal{L}\{\}} -e^{-at}u(-t)$$

(Sinal não causal)

ou seja, um resultado de uma transformada de Laplace pode ter origem em dois sinais distintos e a única maneira de distinguí-los é através da região de convergência.

Nesse momento o leitor deve estar se perguntando sobre a complexidade de se trabalhar com essa ferramenta. Felizmente, a grande maioria dos sinais práticos são causais, o que praticamente reduz essa transformação à um único caminho. Assim, ao invés de trabalharmos com a transformada de Laplace bi-

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 1

-lateral, vamos considerar apenas a transformada unilateral ([0, ∞[) uma vez que todos os sinais práticos trabalhados em circuitos elétricos são causais ($\neq 0 \ \forall t > 0$).

Propriedades da transformada de Laplace:

Agora que o leitor foi introduzido a transformada de Laplace, vamos estudar as principais propriedades deste domínio que tornam o seu uso tão vantajoso na análise de circuitos:

Diferenciação:

A propriedade da diferenciação é dada por:

$$\frac{dx(t)}{dt} \underset{\mathcal{L}^{-1}\{\}}{\overset{\mathcal{L}\{\}}{\rightleftarrows}} sX(s) - x(0)$$

Politécnica UFRJ	**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO** **ESCOLA POLITÉCNICA** **DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA** **EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204**

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	**CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO**
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 1

Prova:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_0^\infty \overbrace{\frac{dx(t)}{dt}}^{f'} \overbrace{e^{-st}}^{g} dt$$

Para resolvermos essa integral vamos considerar:

$$f' = dx/dt \quad f = x(t) \quad g = e^{-st} \quad g' = -s e^{-st}$$

e:

$$\int_a^b f'g = f g\Big|_a^b - \int_a^b f g'$$

então:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = x(t)e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty x(t)(-s e^{-st})dt$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = -x(0) + s \underbrace{\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt}_{X(s)}$$

então:

$$\mathcal{L}\{dx(t)/dt\} = sX(s) - x(0)$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 1

Integração

A propriedade da integração é dada por:

$$\int_0^t x(t)\,dt \;\rightleftarrows\; \frac{X(s)}{s} - \frac{x(0)}{s}$$

Prova:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(t)\,dt\right\} = \int_0^\infty \underbrace{\int_0^t x(t)\,dt}_{f}\ \underbrace{e^{-st}}_{g'}\,dt$$

fazendo:

$$f = \int_0^t x(t)\,dt \quad f' = x(t) \quad g' = e^{-st} \quad g = -e^{-st}/s$$

temos:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(t)\,dt\right\} = \underbrace{-\frac{1}{s}\int_0^t x(t)\,dt \cdot e^{-st}\Big|_0^\infty}_{-x(0)/s} + \frac{1}{s}\underbrace{\int_0^\infty x(t)\,e^{-st}\,dt}_{X(s)}$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 1

Convolução no tempo:

Essa é uma das principais propriedades da transformada de Laplace. Ela é dada por:

$$x(t) * y(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}\{\}}{\overset{\mathcal{L}\{\}}{\rightleftarrows}} X(s)Y(s)$$

Convolução na Frequência

Pelo princípio da dualidade entre os domínios temos que:

$$x(t)y(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}\{\}}{\overset{\mathcal{L}\{\}}{\rightleftarrows}} X(s) * Y(s)$$

Deslocamento no tempo:

A propriedade do deslocamento no tempo é

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 1

dado por:

$$x(t-a) \rightleftarrows e^{-sa}X(s)$$

Prova:

$$\mathcal{L}\{x(t-a)\} = \int_0^\infty x(\underbrace{t-a}_{u})\,e^{-st}\,dt$$

fazendo uma substituição temos

$$\begin{cases} u = t-a \\ du = dt \end{cases}$$

então:

$$\mathcal{L}\{x(t-a)\} = \int_0^\infty x(u)\,e^{-s(u+a)}\,du = e^{-sa}\int_0^\infty x(u)\,e^{-su}\,du$$

$$\mathcal{L}\{x(t-a)\} = e^{-sa}X(s)$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 1

Agora que o leitor já foi apresentado as principais propriedades da transformada de Laplace, vamos estudar a sua aplicação em circuitos elétricos.

Observação: Como a transformada inversa de Laplace envolve uma integração no plano complexo, o que está fora do escopo deste capítulo, a maioria da literatura fornece uma tabela de transformada relacionando um conjunto de sinais no domínio do tempo com suas respectivas transformadas.

Análise de Circuitos no Domínio de Laplace:

Como já mencionamos, o uso da transformada de Laplace unilateral em sistemas lineares e invariantes no tempo tem como objetivo transformar uma equação íntegro-diferencial (no -

domínio do tempo) em uma equação algébrica. Além disso, diferente do que vimos no capítulo de análise de circuitos em regime permanente senoidal, com fasores, a transformada de Laplace permite obter ao mesmo tempo o regime transitório e permanente. Ou seja, em uma mesma transformação somos capazes de obter a resposta ao estado nulo e a resposta à entrada nula (dada pelas condições iniciais do sistema). A seguir vamos aplicar a transformada de Laplace para cada um dos componentes passivos estudados até agora em circuitos elétricos.

Resistor:

A representação do resistor no domínio da frequência (em Laplace) é dada por:

$$V = Ri \longrightarrow V(s) = R\,I(s)$$

Politécnica UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 1

Capacitor:

Sabemos que a equação da corrente em um capacitor no domínio do tempo é dada por:

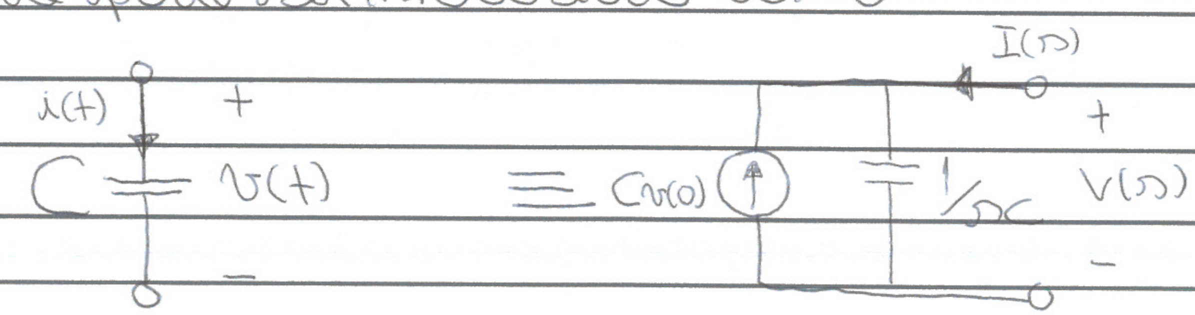
$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

Aplicando a transformada de Laplace unilateral temos

$$I(s) = C\left[sV(s) - v(0)\right]$$

$$I(s) = sCV(s) - Cv(0)$$

que pode ser modelado como



PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 1

Indutor:

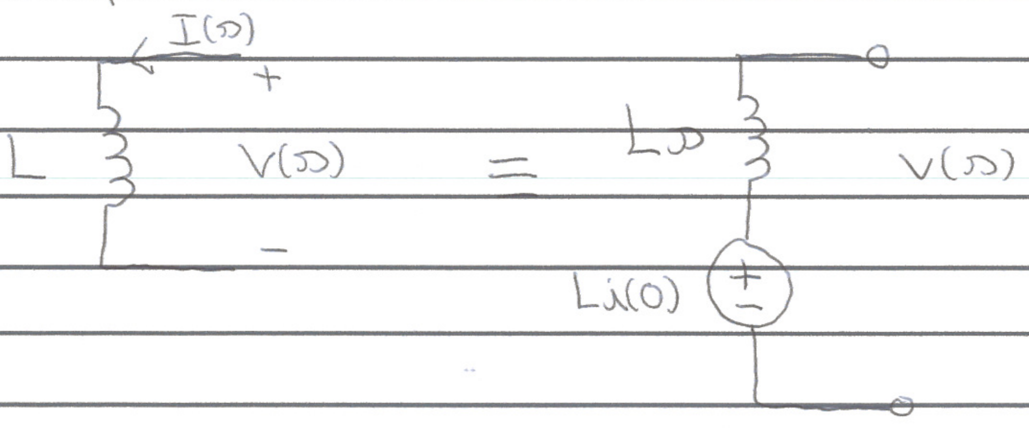
Sabemos que a tensão no indutor é dada por:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

então a transformada de Laplace é dada por:

$$V(s) = L s I(s) - L i(0)$$

Onde pode ser modelado como:



PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 1

finalmente, temos a seguinte tabela:

domínio da frequência

impedância R	R
impedância C	$1/sC$
impedância L	sL

considerando, claro, condições iniciais nulas. então, a partir dessas transformações podemos utilizar cada modelo (e suas respectivas impedâncias) para aplicar toda a teoria de analise de circuitos no domínio da frequência estudado no capítulo de analise de circuitos em regime permanente senoidal com fasores. Então vamos ao seguinte exemplo.

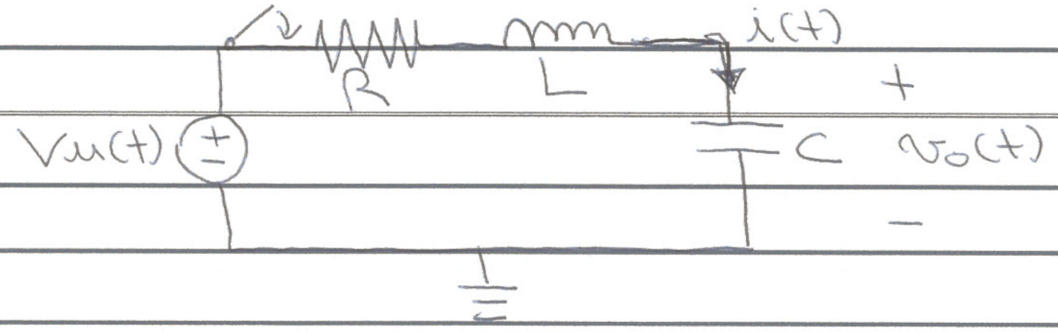
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 1

Considere o seguinte exemplo:



Como o leitor já esta acostumado a resolver um sistema no domínio do tempo, por didático, vamos escrever a saída desse circuito no domínio do tempo. Em nosso exemplo, considere todas as condições iniciais nulas.
*a chave esta aberta para $t<0$
Então aplicando a lei das malhas de Kirchhoff temos:

$$V_u(t) - R\,i(t) - v_L(t) - v_o(t) = 0$$

Onde sabemos que:

$$\begin{cases} v_L(t) = L\,di(t)/dt \\ i_c(t) = C\,dv(t)/dt \\ di_c(t)/dt = C\,d^2v(t)/dt^2 \end{cases}$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 1

então:

$$V u(t) - RC\dot{v}_o - LC\ddot{v}_o - v_o = 0$$

reorganizando essa equação temos:

$$\ddot{v} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\alpha}\dot{v} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega^2} v = \frac{V}{LC} u(t)$$

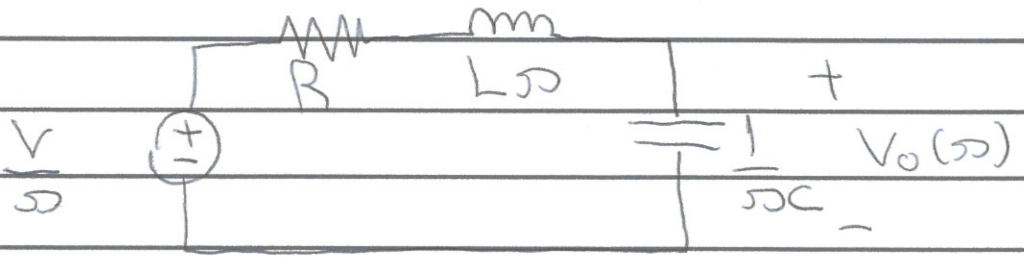
Podemos resolver esse sistema calculando as respostas ao estado nulo e entrada nula separadamente. Ainda, em nosso capítulo de análise de circuitos em regime transitório vimos que se $\alpha > \omega$ a resposta será supercrítica (exponencial), se $\alpha = \omega$ será criticamente amortecido e se $\omega > \alpha$ será subamortecida (uma senoide com amplitude que decai com o tempo. como esse sistema não tem condições iniciais o formato da resposta final dependerá da forma do sinal de excitação

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 1

Em nosso exemplo, o leitor deve perceber que são necessárias diversas etapas para resolver um simples sistema de segunda ordem RLC. Então, vamos agora analisar esse mesmo circuito no domínio de Laplace:

Fazendo as substituições considerando as impedâncias do resistor, capacitor e indutor, temos:



Observação: A transformada de Laplace unilateral do degrau unitário é dada por:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = 1/s$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 1

Agora que temos o modelo do circuito no domínio da frequência, vamos novamente aplicar as leis de Kirchhoff (na frequência) para encontrarmos a saída deste circuito:

$$\frac{V}{s} - RI(s) - LsI(s) - \frac{1}{sC}I(s) = 0$$

$$VC - RCsI(s) - LCs^2I(s) - I(s) = 0$$

$$\frac{V}{L} - \frac{R}{L}s^{1}I(s) - s^2I(s) - \frac{1}{LC}I(s) = 0$$

reorganizando essa equação temos:

$$\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right)I(s) = V/L$$

como a tensão no capacitor pode ser calculada através da lei de Ohm no domínio da

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 1

frequência, temos

$$\begin{cases} I(s) = \dfrac{V}{L} \cdot \dfrac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \\ \\ V_0(s) = \dfrac{1}{sC} \cdot I(s) \end{cases}$$

então a nossa saída será dada por

$$V_0(s) = \frac{1}{sC} \cdot \frac{V}{L} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

o leitor pode facilmente calcular a saída através dos métodos de frações parciais e os valores de R, L e C dados.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 2

Funções de transferência

Até o momento o leitor foi introduzido aos principais conceitos de circuitos elétricos. No capítulo anterior vimos que a transformada de Laplace é uma importante ferramenta para transformar equações integro-diferenciais em equações algébricas. Vimos também que a transformada de Laplace permite tratar um circuito com resistores, indutores e capacitores através das impedâncias complexas. Com isso, vimos que toda a teoria de circuitos construída para circuitos puramente resistivos pode ser estendida para qualquer componente no domínio do tempo. A seguir vamos introduzir um outro importante conceito bastante utilizado na análise de circuitos (ou sistemas lineares e invariantes no tempo) do tipo Single-Input-Single-Output (SISO), a função de transferência

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 2

A função de transferência:

A função de transferência é definida como a razão entre a transformada de Laplace unilateral da saída pela entrada, ou seja:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

considerando que o sistema encontra-se relaxado (condições iniciais nulas). Uma outra interpretação para a função de transferência pode ser dada por:

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

se $X(s)$ for o impulso no tempo temos que

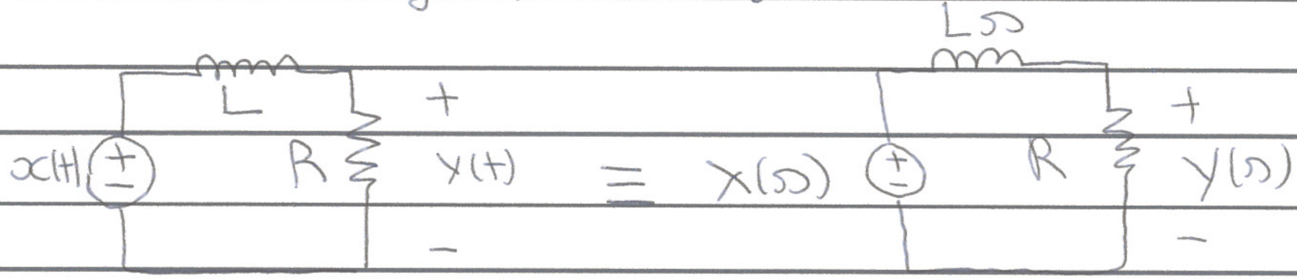
$\delta(t)$ $\rightarrow$ $X(s) = 1$ $\therefore$ $Y(s) = H(s)$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 2

Em outras palavras, H(s) também pode ser considerado como a resposta ao impulso do sistema no domínio do tempo.

Vamos ao seguinte exemplo:



O leitor atento já deve ter percebido que podemos aplicar a regra do divisor de impedâncias para relacionar a tensão no resistor com a tensão de entrada. Ou seja:

$$Y(s) = \frac{R}{Ls+R} X(s)$$

ou seja, a função de transferência será dada por:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R}{Ls+R}$$

Politécnica UFRJ

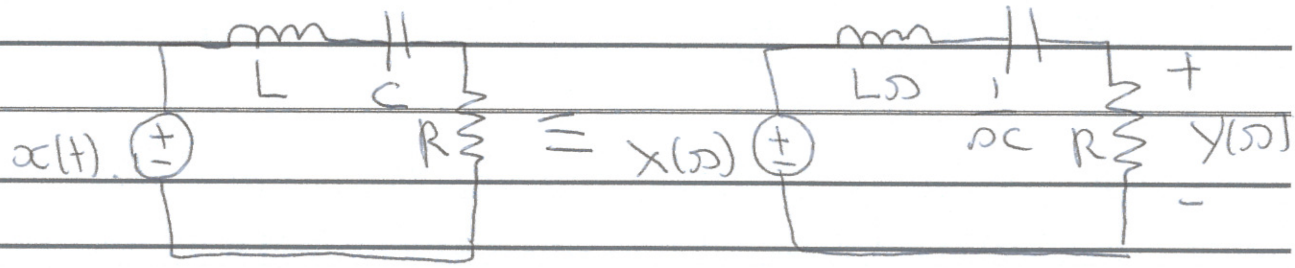
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 2

Se considerarmos um circuito de segunda ordem



Novamente, aplicando o divisor resistivo, temos:

$$Y(s) = \frac{Ls + \frac{1}{sC}}{Ls + \frac{1}{sC} + R} \cdot X(s)$$

então:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{LCs^2+1}{sC}}{Ls + \frac{1}{sC} + R} = \frac{LCs^2+1}{LCs^2+Rs+L}$$

O leitor já deve ter percebido, que a saída Y(s) será dada pela multiplicação de H(s) por qualquer X(s). Em outras palavras:

dom. do tempo

$$Y(s) = H(s)X(s) \qquad y(t) = h(t) * x(t)$$

dom. do freq

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 3

Equações de Estado

Até aqui, o leitor já deve ter percebido que trabalhamos com sistemas de uma entrada e apenas uma saída. No entanto o leitor já deve estar se perguntando se é possível analisar circuitos com mais de uma entrada e mais de uma saída? A resposta é sim. Neste capítulo será introduzido a representação por espaço de estado.

Representação por Espaço de Estado.

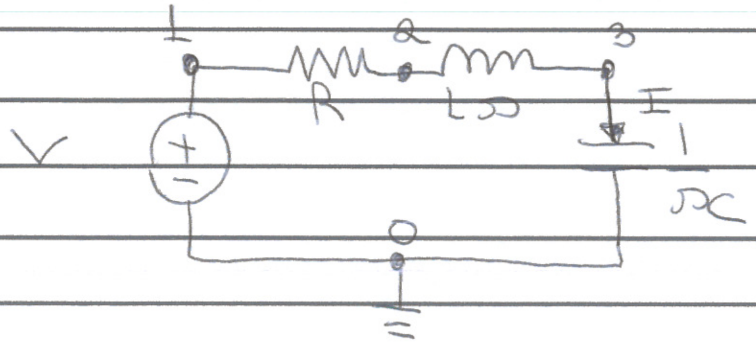
No capítulo anterior (e em todos os outros) aprendemos a trabalhar com sistemas lineares e invariantes no tempo (SLIT). Ainda, até agora, todo nosso esforço foi voltado para sistemas SISO. O leitor atento já deve ter notado que para sistemas SISO, a função de transferência é uma poderosa representação. Por outro lado, ela traz algumas desvantagens:

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 3

- Não é possível representá-la para sistemas do tipo MIMO (Multiple Inputs Multiple outputs)
- não permite ter acesso à algumas variáveis internas do sistema como tensão nos capacitores e ou correntes nos indutores.

Para estender essa representação de tal forma que essas duas vantagens sejam superadas utilizamos a representação por espaço de estados. Para entendermos essa representação considere o seguinte exemplo:



PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 3

Para esse circuito vamos escrever as seguintes relações

$$v_{23} = L\dot{x}_1 \qquad \begin{cases} i_{12} = \dfrac{v_{12}}{R} \\ i_{23} = i_{30} \\ i_{30} = C\dot{x}_2 \end{cases}$$

$$v_{12} = i_{12}R$$

$$V - v_{12} - v_{23} - v_{30} = 0$$

Então podemos escrever:

$$\underbrace{V}_{u} - C\dot{x}_2 R - L\dot{x}_1 -$$

Se reorganizamos essa equação podemos escrever

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}}_{B} u$$

Onde $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ são chamadas de variáveis de estado e as matrizes A e B são chamadas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 3

de matriz de estado e matriz de entrada respectivamente. Se o leitor escrever todas as tensões e correntes em função da entrada u e do vetor x ele terá o seguinte formato:

$$y = Cx + Du$$

onde y é o vetor de saída, C é a matriz de saída e D a matriz de alimentação. por fim sua representação é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Além disso essa representação permite que sistemas não lineares e variantes no tempo sejam escritos. Ou seja:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases}$$ Sistema linear variante no tempo

ou

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$
$$y = g(x, u, t)$$ Sistema não linear variante no tempo

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 3

Além de poder representar sistemas MIMO, lineares/não lineares e variantes/não variantes no tempo. Essa representação adiciona uma outra vantagem, a notação matricial.
Com esse tipo de representação é possível utilizar diferentes tipos de solução matricial para encontrar as variáveis.

Por fim, vamos aplicar a transformada de Laplace no sistema de equações de espaço de estado.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$X(s) = \frac{1}{(Is-A)} x(0) + \frac{BU(s)}{(Is-A)}$$

vamos escrever:

$$\frac{1}{Is-A} = (Is-A)^{-1} = \Phi$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 3

então:

$$X(s) = \Phi x(0) + \Phi B U(s)$$

substituindo $X(s)$ na equação de saída temos:

$$y = Cx + Du$$

$$Y(s) = C X(s) + D U(s)$$

$$Y(s) = C[\Phi x(0) + \Phi B U(s)] + D U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{C \Phi x(0)}_{\text{Resposta à entrada nula}} + \underbrace{C \Phi (B + D) U(s)}_{\text{Resposta ao estado nulo}}$$

o leitor atento deve reparar que a matriz $\Phi = (sI - A)^{-1}$ terá como polinômio em cada saída $\det(Is - A)$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	VSF8

QUESTÃO Nº 3

Ou seja, a solução deste polinômio característico será os pólos do sistema.

Observação: O leitor deve lembrar que a inversa de uma matriz M é dado por

$$M = \frac{1}{|M|} \mathbb{C}$$

onde $\mathbb{C}$ é a matriz de cofatores e $|M|$ é a det(M). Note que cada índice da matriz da resposta nula ou resposta à entrada nula terá em seu denominador o polinômio dado por

estado

$\det(M) \equiv \det(\Phi)$