



**UFRJ**

**Politécnica**  
UFRJ

**CONCURSO DE PROVAS E TÍTULOS DO MAGISTÉRIO SUPERIOR  
EDITAL N° 54 DE 30/01/2024 – PUBLICADO NO DOU N° 24 DE 02/02/2024**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**VAGA MC-204 – SETOR DE CIRCUITOS ELÉTRICOS E SISTEMAS LINEARES**

**DIA:** 04 de novembro de 2024.

**LOCAL:** Sala 227A - Bloco H - Escola Politécnica/CT/UFRJ

**CADERNO DE QUESTÕES - PROVA ESCRITA**

- 1) Discorra amplamente sobre Utilização de transformada de Laplace na análise de circuitos, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um circuito de ordem igual ou maior a 2.
- 2) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando função de transferência, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.
- 3) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando equações de estado, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	Q3T8

QUESTÃO Nº 2

A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE UM SISTEMA LINEAR REPRESENTA A RELAÇÃO ENTRE A SAÍDA E ENTRADA, DADO POR  $H = Y/X$ , ONDE Y É A SAÍDA, X A ENTRADA E H A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA. ESTAS, POR SUA VEZ, PODEM SER ESCRITAS TANTO EM FUNÇÃO DA VELOCIDADE ANGULAR  $\omega$ , COMO EM FUNÇÃO DE S, ONDE  $s = j\omega$ . X E Y SÃO USUALMENTE ESCRITOS COMO POLINÔMIOS, EM QUE AS RAÍZES DO NUMERADOR, Y, SÃO CHAMADAS DE ZEROS, E AS RAÍZES DO DENOMINADOR, X, SÃO CHAMADAS DE POLOS. AS RAÍZES DOS POLINÔMIOS, POR SUA VEZ, PODEM SER REPRESENTADAS EM UM PLANO CARTESIANO COMPLEXO, COM UM EIXO X REAL E EIXO Y IMAGINÁRIO. UMA POSSÍVEL ANÁLISE UTILIZANDO FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA É COM RELAÇÃO A ESTABILIDADE DO SISTEMA, QUE PARA QUE SEJA ESTÁVEL É NECESSÁRIO QUE O POLINÔMIO DO DENOMINADOR SEJA PENO MENOS IGUAL, OU MAIOR, QUE O DO NUMERADOR E OS POLOS DEVEM ESTAR NO EIXO REAL NEGATIVO. CABE DESTACAR QUE CASO HAJA UM POLO COMPLEXO ESTE SERÁ UM PAR CONJUGADO. DEVIDO A IMPORTÂNCIA DO POLINÔMIO DO DENOMINADOR ESTE É COMUMENTE CHAMADO DE POLINÔMIO CARACTERÍSTICO DO SISTEMA. NO CONTEXTO DA ENGENHARIA ELÉTRICA A FUNÇÃO DE TRANSFÊNCIA É AMPLAMENTE UTILIZADA PARA O DIMENSIONAMENTO DE FILTROS, DADA A SUA DEFINIÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE SAÍDA E ENTRADA. ALÉM DISSO, TAMBÉM



PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	2378

QUESTÃO Nº 2

É UTILIZADA PARA AVALIAÇÃO DE CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLES, COMO POR EXEMPLO NA DETERMINAÇÃO DOS GANHOS EM UM CONTROLE DE VELOCIDADE DE UMA MÁQUINA ELÉTRICA. UM EXEMPLO DE PROBLEMA ENVOLVENDO O TEMA É DETERMINAR O TIPO DE FILTRO APLICADO A UM CIRCUITO RLC SÉRIE QUANDO A TENSÃO DE SAÍDA  $V_o$  É MEDIDA NO RESISTOR OU ENTRE O INDUTOR E CAPACITOR. CONSIDERANDO QUE A TENSÃO DE ENTRADA É  $V_i$ , A TENSÃO NO RESISTOR PODE SER DETERMINADA PELO DIVISOR DE TENSÃO, ONDE AS IMPEDÂNCIAS DO INDUTOR E CAPACITOR SÃO, RESPECTIVAMENTE,  $j\omega L$  E  $-j/\omega C$ . ASSIM,  $V_o = V_i \cdot \frac{R}{R + j\omega L - j/\omega C} = V_i \cdot \frac{R}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}$ . COMO A DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA É SAÍDA DIVIDIDA PELA ENTRADA, PODE-SE CONSIDERAR QUE  $H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}$ . CONSIDERANDO QUE  $\omega \rightarrow 0$  TEM-SE QUE  $H \rightarrow 0$  E  $\omega \rightarrow \infty$  TEM-SE  $H \rightarrow 0$ . ASSIM, O FILTRO É CHAMADO DE PASSA-PASSA, ONDE APENAS FREQUÊNCIAS NAS PROXIMIDADES DA FREQUÊNCIA DE CORTE  $\omega_c$  SÃO VISTAS NA SAÍDA. A  $\omega_c$  PODE SER ENCONTRADA CONSIDERANDO A PARTE COMPLEXA DO DENOMINADOR IGUAL A ZERO, OU SEJA,  $\omega L - 1/\omega C = 0 \rightarrow \omega L = 1/\omega C \rightarrow \omega^2 = 1/LC$ ;  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . JÁ PARA A TENSÃO DE SAÍDA ENTRE O INDUTOR E O CAPACITOR A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA É DADA POR  $H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \dots \dots \frac{j\omega L - 1/\omega C}{R + j\omega L - 1/\omega C}$ , TAMÉM EXTRAÍDA PELO DIVISOR DE TENSÃO.



<p>PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)</p>	<p>CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO</p>
<p>LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024</p>	<p>Q378</p>

QUESTÃO Nº 2

CONSIDERANDO  $W \rightarrow 0$  TEM-SE  $H \rightarrow 1$  E  $W \rightarrow \infty$  TEM-SE  $H \rightarrow 0$ . ASSIM, O FILTRO É CHAMADO DE REJEITA-FAIXA, COM FREQUÊNCIA DE CORTE  $\omega_c = 1/\sqrt{LC}$ . NATURALMENTE CIRCUITOS RLC SÃO DE SEGUNDA ORDEM, ENTRETANTO, TORNA-SE MAIS EVIDENTE AO SE CONSIDERAR QUE  $S = j\omega$ . ASSIM A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO PASSA-FAIXA SE TORNA, APÓS ALGÉBRISMO,  $H(s) = sR/L / (s^2 + sR/L + 1/LC)$ . JÁ A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO REJEITA-FAIXA É  $H(s) = (s^2 + 1/LC) / (s^2 + sR/L + 1/LC)$ . ASSIM, PELO GRAU DO POLINÔMIO CARACTERÍSTICO É POSSÍVEL CONFIRMAR A ORDEM 2.



PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	0378

QUESTÃO Nº 3

UMA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA É CAPAZ DE RELACIONAR UMA SAÍDA PARA UMA DADA ENTRADA EM UM SISTEMA. ENTRETANTO, ELA NÃO É CAPAZ DE RELACIONAR SISTEMAS COM MAIS DE UMA ENTRADA OU MAIS DE UMA SAÍDA. SEMPO ASSIM, AS EQUAÇÕES DE ESTADO SE TORNAM ÚTEIS QUANDO SE CONSIDERAM SISTEMAS MIMOS - MULTI INPUT MULTI OUTPUT. AS EQUAÇÕES DE ESTADO DERIVAM DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO SISTEMA, ESCRITA NA FORMA  $\dot{x} = Ax + B\theta$ , ONDE  $\dot{x}$  É A DERIVADA DAS VARIÁVEIS DE ESTADO  $x$ . JÁ A SAÍDA  $y$  É ESCRITA COMO  $y = Cx + D\theta$ . ASSIM AS EQUAÇÕES DE ESTADO SÃO DEFINIDAS PELAS MATRIZES  $A, B, C$  E  $D$ . NO CONTEXTO DE SISTEMAS ELÉTRICOS AS VARIÁVEIS DE ESTADO SÃO USUALMENTE ESCOLHIDAS COMO AS CORRENTES NOS INDUTORES E TENSÕES NOS CAPACITORES.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	03TB

QUESTÃO Nº 3

UM EXEMPLO DE PROBLEMA DE EQUAÇÕES DE ESTADO COM CIRCUITOS DE SEGUNDA ORDEM É DETERMINAR AS EQUAÇÕES PARA O CIRCUITO RLC SÉRIE. PODE-SE CONSIDERAR QUE OS SAÍDAS SÃO A CORRENTE E TENSÃO NO RESISTOR, E AS VARIÁVEIS DE ESTADO SÃO AS CORRENTE NO INDUTOR E TENSÃO NO CAPACITOR. PELA LEI DAS MALHAS  $-V_i + V_R + V_L + V_C = 0$ , ONDE  $V_i$ ,  $V_R$ ,  $V_L$  E  $V_C$  SÃO, RESPECTIVAMENTE, AS TENSÕES NA FONTE, RESISTOR, INDUTOR E CAPACITOR. PORÉM A TENSÃO NO INDUTOR É DADA POR  $V_L = L di/dt$ , EM QUE  $di/dt$  PODE SER ESCRITO COMO  $\dot{i}$ . SUBSTITUINDO NA EQUAÇÃO E ISOLANDO  $\dot{i}$ , TEM-SE QUE  $\dot{i} = -R/L i - 1/L V_C + 1/L V_i$ . JÁ A EQUAÇÃO DO CAPACITOR NOS DÁ  $\dot{v}_C = C dv_C/dt$ , QUE PODE SER ESCRITO COMO  $\dot{v}_C = C \dot{v}_C$ . COMO  $\dot{i} = \dot{v}_C = \dot{v}_L = \dot{v}_R$ , PODE-SE ESCRVER A EQUAÇÃO COMO  $\dot{v}_C = \dot{v}_L / L$ . POR FIM, COMO  $\dot{v}_R = \dot{v}_L$ , LOGO  $V_R = R \cdot \dot{v}_L$ . ASSIM, AS EQUAÇÕES DE ESTADO PODEM SER EM ESCRITAS COMO:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} [V_i]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_R \\ \dot{v}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [V_i]$$

