C ONCURSO DE PROVAS E TÍTULOS DO MAGISTÉRIO SUPERIOR
EDITAL N° 54 DE 30/01/2024 – PUBLICADO NO DOU N° 24 DE 02/02/2024

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

VAGA MC-204 – SETOR DE CIRCUITOS ELÉTRICOS E SISTEMAS LINEARES

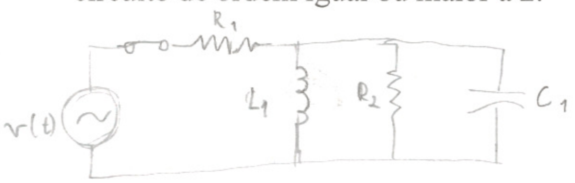
DIA: 04 de novembro de 2024.

LOCAL: Sala 227A - Bloco H - Escola Politécnica/CT/UFRJ

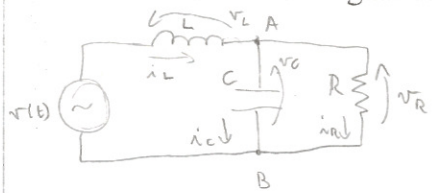
CADERNO DE QUESTÕES - PROVA ESCRITA

1) Discorra amplamente sobre Utilização de transformada de Laplace na análise de circuitos, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um circuito de ordem igual ou maior a 2.

$f(s) = \int_0^t f(t)\, e^{st}\, dt \quad s = j\omega + \theta$



2) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando função de transferência, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.



$m = v(t)$

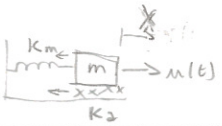
$y = v_R(t)$

LKC em A : $i_L(t) = i_C(t) + i_R(t)$

LKT em ① : $v(t) - v_L(t) - v_R(t) = 0$

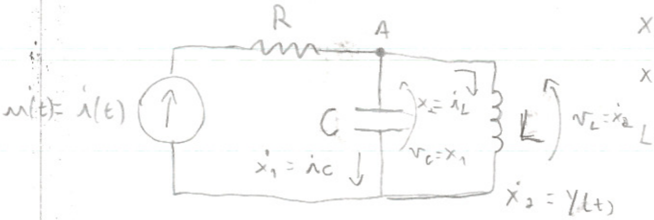
$v(t) - L\dfrac{d\,i(t)}{dt} - v_R$

$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \ddot{x}$



$(m(t) - K_m x - k_2 \dot{x}) = y(t) \int dt \int_0^t m\,dt - K_m x - \dfrac{k_2 \dot{x}}{2} = \dfrac{m(s)}{s} - \dfrac{K_m s +}{K_2 s^2}$

3) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando equações de estado, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.



$x_1 = v_C \qquad \dot{x}_1 = C x_1$

$x_2 = i_L \qquad \dot{x}_2 = L x_2$

LKC em A : $R\,m(t) = \dot{x}_1 + x_2$

$\dot{x}_1 = -x_2 + R\,m(t)$

$\dot{x}_2 = y(t)$

$\dot{x}_2 = x_1$

$\dot{x}_2 = x_1 = y$

$y = x_1 \quad ou \quad y = L x_2$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} m$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0\,m$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}_{k \times 1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}_{k \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{n \times 1} + \begin{bmatrix} m & n \\ & \end{bmatrix}_{k \times m} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

$y_1 = a x_1 + b x_2 + m\,m_1 + n\,m_2 + o\,m_3 + p\,m_4$

$(2 K_m s + k_2 s^2) \cdot Y(s)$

$\left(\dfrac{2K_m s + K_2 s^2}{2}\right) Y(s)$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	P7L1

QUESTÃO Nº 1

Em análises de circuitos elétricos, podemos nos deparar com equações diferenciais e integrais que podem dificultar os cálculos necessários. Visando a simplificação desses cálculos, pode-se utilizar de uma ferramenta chamada transformada de Laplace.

Esta ferramenta transforma uma função que esteja no domínio do tempo, isso é, f(t), em uma função no domínio-s, também conhecido como domínio da frequência, isso é, f(s). Para isso é utilizada a integral:

$$f(s) = \int_0^t f(t) \cdot e^{st}\, dt$$

Ao aplicar a transformada de Laplace em equações diferenciais e integrais, ela acaba as transformando em equações puramente algébricas, que podem ser resolvidas e, após encontrar a resposta desejada, retornar ao domínio do tempo utilizando a transformada inversa de Laplace.

Este recurso é bastante útil ao analisar a resposta transiente de um circuito, pois podemos ~~eliminar a~~ encontrar facilmente os valores das condições iniciais dos elementos acumuladores utilizados nos cálculos, facilitando a sua análise.

Politécnica UFRJ

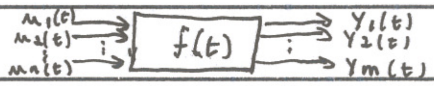
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	P7L1

QUESTÃO Nº 2

Um sistema linear pode ser representado por uma função, ~~ou~~ que recebe como entrada sinais que variam com o tempo e respondem um sinal modificado pelo comportamento do sistema. Podemos representar graficamente como uma caixa preta:

Entradas  Saídas

Pode-se modelar esse sistema de modo a representar a influência da entrada na saída do sistema, para tal, utiliza-se da função de trasferência.

A função de transferência é a trasformada de Laplace da ~~função~~ equação de entrada e saída de um sistema linear, isso é:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$, onde $Y(s)$ é a saída do sistema
$U(s)$ é a entrada do sistema
e $G(s)$ é a função de transferência.

A função de transferência $G(s)$ normalmente é uma fração $N(s)/D(s)$, onde o numerador $N(s)$ e o denominador $D(s)$ são polinômios de s. Quando o $grau(N(s)) \leqslant grau(D(s))$, dizemos que $G(s)$ é própria, Quando o

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	P7L1

QUESTÃO Nº 2

grau(N(s)) ~~≠~~ < grau(D(s)), dizemos que G(s) é estritamente própria. Quando o grau(N(s)) = grau(D(s)), dizemos que G(s) é criticamente própria. Finalmente, quando o grau ~~no~~ (N(s)) > grau(D(s)), dizemos que G(s) é imprópria.

Isso indica que, quando $s \to \infty$, se G(s) for:

- própria, $|G(s)| = c$, onde c é uma constante menor que ~~1~~ 1;
- estritamente própria, $G(s) = 0$;
- criticamente própria, $|G(s)| = c$, onde c é uma constante
- imprópria, $|G(s)| = \infty$.

Como sistemas com G(s) imprópria aumentam os ruídos do sistema, é desejável não utilizá-los.

As raízes de N(s) são chamadas de polos, e ~~quando~~ as raízes de D(s) são chamadas de zeros. Quando s for igual a um polo (λ_p), $G(\lambda_p) = \infty$, por outro lado, quando s for igual a um zero (λ_z), $G(\lambda_z) = 0$.

Para exemplificar, considere o sistema mecânico abaixo, onde m é a massa do corpo, k_m é a constante linear da mola e k_a é a porção linear da constante de atrito. Considere $u(t)$ a força aplicada no corpo e $Y(t)$ o deslocamento em relação ao ponto de repouso. Considere o sistema inicialmente em equilíbrio.

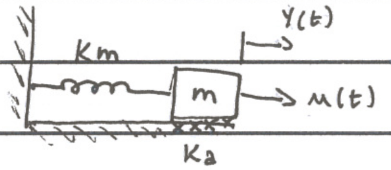
Politécnica UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	P7L1

QUESTÃO Nº 2



Considerando as regiões lineares de Km e Ka, sabemos que as forças geradas são, respectivamente:

$K_m . \dot{y}(t)$ e $K_a . \ddot{y}(t)$, onde $\dot{y}(t)$ é a velocidade do corpo e $\ddot{y}(t)$ é a aceleração do corpo.

Aplicando a Lei de Newton:

$u(t) = K_m . \dot{y}(t) + K_a . \ddot{y}(t)$, integrando os dois lados:

$\int u(t)\,dt = K_m . Y(t) + \frac{K_a . \dot{Y}(t)}{2}$, fazendo a transformada de Laplace:

$\frac{u(s)}{s} = K_m . Y(s) + \frac{K_a . s}{2} . Y(s) - Y(0)$, como a condição inicial é nula,

$\frac{u(s)}{s} = K_m . Y(s) + \frac{K_a}{2} . s . Y(s) \Rightarrow \frac{u(s)}{s} = \left(K_m + \frac{K_a s}{2}\right) Y(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{2}{K_a s^2 + 2 K_m s} = \frac{2}{s(K_a s + 2 K_m)}$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	P7L1

QUESTÃO Nº 3

Ao analisar circuitos que possuam elementos acumuladores, ou outros sistemas lineares, podemos nos interessar no comportamento desses elementos, que são nossas variáveis de interesse. Essas variáveis são chamadas de variáveis de estado, que podem ser, por exemplo, a tensão em um capacitor, corrente em um indutor, a velocidade de um corpo em movimento, ~~ou~~ a velocidade angular de um pêndulo, entre outros.

Um estado indica os valores que as variáveis estão em um determinado instante t. Portanto, ao relacionar essas variáveis às entradas e às saídas de um sistema linear, podemos analisar o comportamento do sistema em função dessas variáveis. Este modelo é chamado de Equações de Estado.

Seja $\underline{X}(t)$ um vetor coluna $[x_1(t)\ x_2(t) \dots x_n(t)]^T$, onde $x_i(t)$ $i = 1, \dots, n$, são as variáveis de estado, $u(t)$ e $y(t)$ a ~~as~~ entrada e a saída, respectivamente, do sistema, e $\dot{\underline{x}}(t)$ a derivada das variáveis de estado.

Todo sistema linear pode ser representado por:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,u(t) \\ y(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t) + \underline{D}\,u(t) \end{cases}$$

, onde

Politécnica UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

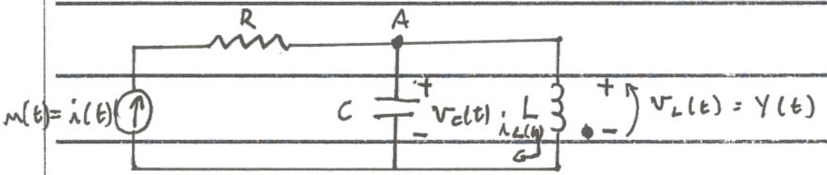
PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	P7L1

QUESTÃO Nº 3

$\underline{A}$ e' uma matriz $n \times n$, $\underline{B}$ e' uma matriz $n \times 1$, $\underline{C}$ e' uma matriz $1 \times n$ e $\underline{D}$ e' uma matriz 1×1. Isso considerando um sistema SISO (single input, single output), no caso de possuir multiplas entradas e saídas, basta considerar $\underline{u}(t) = [u_1(t)\ u_2(t) \dots u_m(t)]^T$ e $\underline{Y}(t) = [y_1(t) \dots y_k(t)]^T$, ~~e~~ $\underline{B}$ sendo $n \times m$, $\underline{C}$ sendo $k \times n$ e $\underline{D}$ sendo $k \times m$.

Exemplo da modelagem utilizando equações de estado em um circuito RLC:

Dado o circuito abaixo, ~~modele~~ encontre as equações de estado considerando como variáveis de estado a tensão no capacitor e a corrente no indutor e a tensão no indutor como a saída do sistema.



Primeiramente, indicamos as variáveis de estado:

$x_1(t) = v_c(t)$, derivando, temos: $\dot{x}_1(t) = C x_1$

$x_2(t) = i_L(t)$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $\dot{x}_2(t) = L x_2$

Fazendo a Lei de Kirchhoff das Correntes no nó A:

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	**CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO**
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	P7L1

QUESTÃO Nº 3

$R \cdot m(t) = \dot{x}_1(t) + x_2(t) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = -x_2(t) + R \cdot m(t)$ //

Como L está em paralelo com C,

$x_1(t) = \dot{x}_2(t)$ //

Como a saída y(t) foi definida como a tensão no indutor:

$y(t) = \dot{x}_2 \Rightarrow y(t) = L\, x_2(t)$ //

Podemos, então, montar nossas equações de estado:

$\dot{x}_1(t) = 0 \cdot x_1(t) - 1 \cdot x_2(t) + R \cdot m(t)$

$\dot{x}_2(t) = 1 \cdot x_1(t) - 0 \cdot x_2(t) + 0 \cdot m(t)$

$y(t) = 0 \cdot x_1(t) + L\, x_2(t) + 0 \cdot m(t)$

$\Downarrow$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \cdot m(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot m(t)$$

//