UFRJ

Politécnica UFRJ

**CONCURSO DE PROVAS E TÍTULOS DO MAGISTÉRIO SUPERIOR**
**EDITAL N° 54 DE 30/01/2024 – PUBLICADO NO DOU N° 24 DE 02/02/2024**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**VAGA MC-204 – SETOR DE CIRCUITOS ELÉTRICOS E SISTEMAS LINEARES**

**DIA:** 04 de novembro de 2024.

**LOCAL:** Sala 227A - Bloco H - Escola Politécnica/CT/UFRJ

## CADERNO DE QUESTÕES - PROVA ESCRITA

1) Discorra amplamente sobre Utilização de transformada de Laplace na análise de circuitos, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um circuito de ordem igual ou maior a 2.

2) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando função de transferência, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.

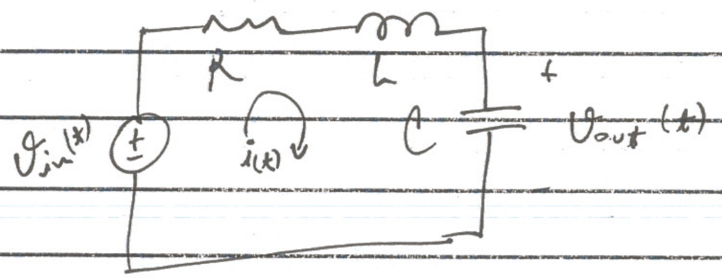
3) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando equações de estado, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.

| PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS) | CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO |
| --- | --- |
| LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ<br>DATA: 04/11/2024 | L3Z1 |

**QUESTÃO Nº** 1

A utilização da transformada de Laplace na análise de circuitos é uma técnica eficiente para soluções de equações diferenciais. Em circuitos elétricos os sistemas são decritos por equações diferenciais, geralmente de grau 2, quando se trata circuitos RLC por exemplo. E a solução dessas equações determina o comportamento, ou a dinâmica, desses sistemas.

Como exemplo de aplicação prática, considere o seguinte circuito.




Com o objetivo de se determinar a tensão de saída no capacitor, considerando uma tensão de entrada contínua. Pela aplicação da lei de Kirchhoff das tensões; sendo a corrente $i(t)$ percebida

QUESTÃO Nº 1

Por todos elementos do circuito, têm-se a seguinte relação:

$$v_{in}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + v_{out}(t) \quad (1)$$

que são as somas das parcelas das tensões, respectivamente, no resistor, no indutor e no capacitor.

Da relação tensão-corrente para o capacitor, têm-se que

$$i(t) = C\frac{dv_{out}(t)}{dt} \quad (2)$$

e substituindo (2) em (1)

$$v_{in}(t) = RC\frac{dv_{out}(t)}{dt} + LC\frac{d^2v_{out}(t)}{dt^2} + v_{out}(t)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{LC}v_{in}(t) = \frac{d^2v_{out}(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_{out}(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v_{out}(t) \quad (3)$$

e (3) é uma equação diferencial linear de segunda

| PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS) | CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO |
|---|---|
| LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ<br>DATA: 04/11/2024 | L3Z1 |

QUESTÃO Nº 1

ordem, e utilizando a propriedade de diferenciação no tempo para $V_{out}(s)$ e $V_{in}(s)$, sendo as respectivas transformadas de $v_{out}(t)$ e $v_{in}(t)$, têm-se de (3)

$$\frac{1}{LC}V_{in}(s) = s^2V_{out}(s) - s\,v_{out}(0^-) - v'_{out}(0^-) + \frac{R}{L}\left[sV_{out}(s) - v_{out}(0^-)\right] + \frac{1}{LC}V_{out}(s) \quad (4)$$

Com $v'_{out}(0^-)$ a derivada de $v_{out}(t)$ em $t=0^-$, condição inicial de corrente no capacitor $i(0^-)$ e $v_{out}(0^-)$, condição inicial de tensão no capacitor. Reescrevendo (4) para $V_{out}(s)$

$$V_{out}(s) = \frac{s\,v_{out}(0^-) + v'_{out}(0^-) + (R/L)\,v_{out}(0^-)}{s^2 + (R/L)s + 1/LC} + \frac{(1/LC)V_{in}(s)}{s^2 + (R/L)s + 1/LC} \quad (5)$$

Para equações lineares, como (5), as funções em s são conhecidas, assim, o processo de obtenção de $v_{out}(t)$ se dá pela dualidade da transformada. Na obtenção de $v_{out}(t)$, utiliza-se a conhecida técnica de expansão em frações parciais, tendo três casos possíveis para as raízes do denominador de $V_{out}(s)$. O primeiro caso, as raízes podem ser reais

| PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS) | CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO |
|---|---|
| LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ<br>DATA: 04/11/2024 | L3Z1 |

QUESTÃO Nº 1

e distintas, no segundo caso, podem-se ter raízes repetidas, ou ainda, em um terceiro caso, as raízes podem ser complexas. Considere como exemplo que para o sistema considerado que todas as condições iniciais são nulas e que $R = 3\Omega$, $L = \frac{1}{2}H$ e $C = 1F$. Assim (5) fica

$$V_{out}(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} V_{in}(s) \qquad (6)$$

e considerando $v_{in}(t) = 1\,V$ (contínuo), $V_{in}(s) = \frac{1}{s}$ e

$$V_{out}(s) = \frac{2}{s(s+2)(s+1)} \qquad (7)$$

Utilizando frações parciais

$$V_{out}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+1)} \qquad (8)$$

e aplicando o teorema de Heaveside

| PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS) | CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO |
|---|---|
| LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ<br>DATA: 04/11/2024 | L3Z1 |

QUESTÃO Nº 1

$$A = sV_{out}(s)\Big|_{s=0} = \frac{2}{(s+2)(s+1)}\Big|_{s=0} = \frac{2}{2} = 1$$

$$B = (s+2)V_{out}(s)\Big|_{s=-2} = \frac{2}{(-2)(-2+1)} = 1$$

$$C = (s+1)V_{out}(s)\Big|_{s=-1} = \frac{2}{(-1)(-1+2)} = -2$$

Assim, (8) torna-se

$$V_{out}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} - \frac{2}{s+1} \qquad (9)$$

Resultando em

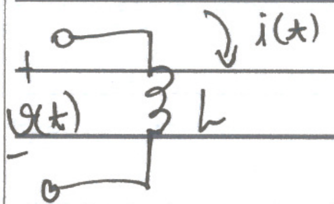
$$v_{out}(t) = 1 + e^{-2t} - 2e^{-t} \qquad (10)$$

uma vez que todas as transformadas são conhecidas.

| PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS) | CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO |
|---|---|
| LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ<br>DATA: 04/11/2024 | L3Z1 |

**QUESTÃO Nº** 1

A linearidade da transformada de Laplace possibilita a escrita direta das equações de circuito em um processo conhecido como transformação do circuito, do domínio do tempo, para o domínio s. Como ilustração, considere a relação de tensão nos terminais de um indutor




$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ e aplicando a transformada de Laplace $V(s) = L[sI(s) - i(0^-)]$

Considerando $i(0^-) = 0$, tem-se

$$\frac{V(s)}{I(s)} = sL \qquad (11)$$

essa relação tensão-corrente em s é análoga ao conceito de impedância descrito no domínio dos fasores e assim, um indutor pode ser substituído pelo se equivalente em s usando a relação em (11).

| Politécnica UFRJ | UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO<br>ESCOLA POLITÉCNICA<br>DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA<br>EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204 |
|---|---|

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

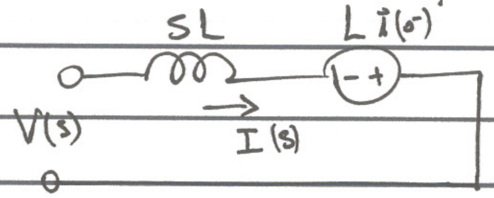
| PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS) | CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO |
|---|---|
| LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ<br>DATA: 04/11/2024 | L3Z1 |

QUESTÃO Nº 1

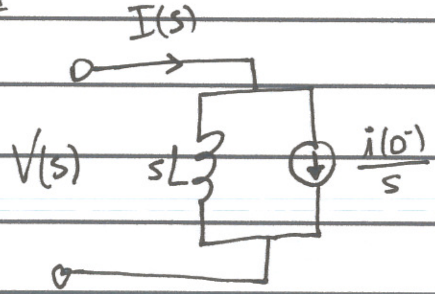
Se $i(0^-)$ é diferente de zero.

$$V(s) = sL\,I(s) - L\,i(0^-) \qquad (12)$$

E (12) é uma equação parecida com uma equação que usa a lei das tensões de Kirchhoff, assim um circuito descrito por essa relação teria a seguinte forma




Ou ainda



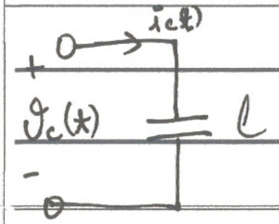

se (12) fosse escrita da seguinte forma:

$$\frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s} = I(s)$$

Para, um capacitor, a aplicação dos conceitos discutidos leva às seguintes relações:

| PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS) | CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO |
|---|---|
| LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ<br>DATA: 04/11/2024 | L3Z1 |

QUESTÃO Nº 1

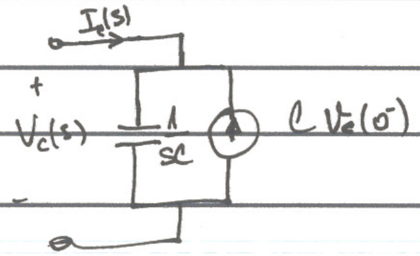



$i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$ ∴ $I_c(s) = C\left[s.V_c(s) - v_c(0^-)\right]$

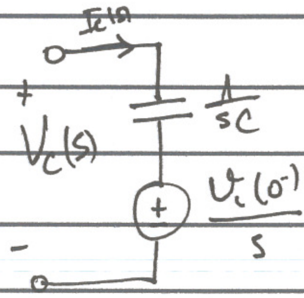
$$I_c(s) = sCV_c(s) - Cv_c(0^-) \qquad (13)$$

Para $v_c(0^-) = 0$; $\frac{V_c(s)}{I_c(s)} = \frac{1}{sC}$; Impedância em s de um capacitor.

Novamente, analisando (13) e percebendo sua semelhança com equações oriundas da aplicação da lei das correntes de Kirchhoff, um capacitor poderia então, ser inserido em um circuito no domínio s como




ou




com (13) escrito como:

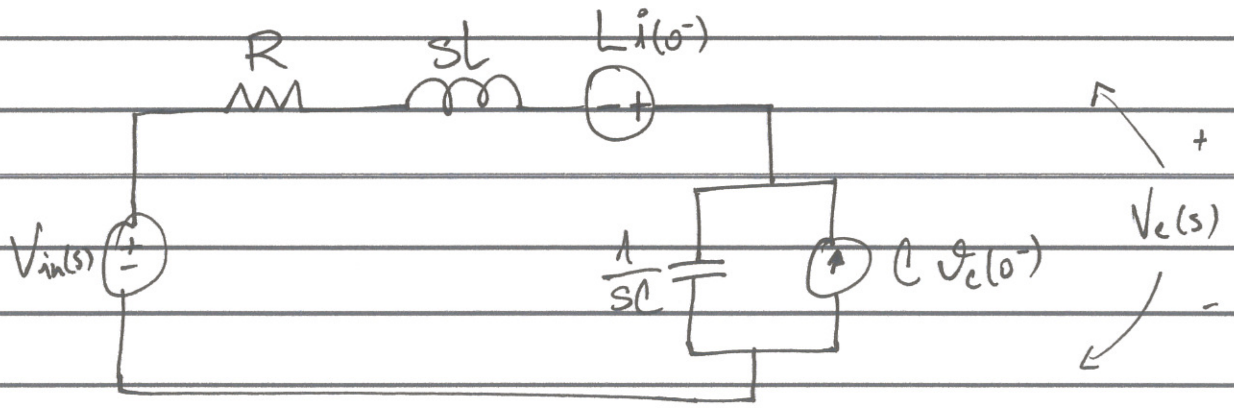
$$V_c(s) = \frac{I_c(s)}{sC} + \frac{v_c(0^-)}{s}$$

Assim o circuito RLC discutido no domínio do tempo teria o equivalente em s desenhado da seguinte forma:

| Politécnica UFRJ | UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO<br>ESCOLA POLITÉCNICA<br>DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA<br>EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204 |
|---|---|
| CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR | |

| PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS) | CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO |
|---|---|
| LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ<br>DATA: 04/11/2024 | L3Z1 |

QUESTÃO Nº 1



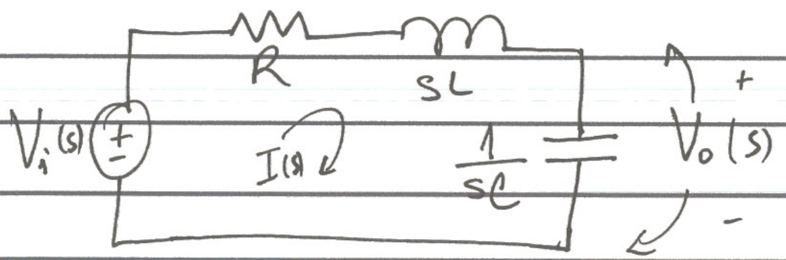

Com $V_c(s)$ dado por $V_{out}(s)$ em (5)

| PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS) | CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO |
| --- | --- |
| LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ<br>DATA: 04/11/2024 | L3Z1 |

QUESTÃO Nº 2

A obtenção de modelos de sistemas lineares é de fundamental importância para evolução e/ou aprimoramento de teis, seja para propostas de alterações estruturais, seja para soluções em aplicações de controle. Uma das formas de representação de sistemas lineares é a representação por sua função de transferência, uma relação de (~~entrada/saída~~ ~~ou~~) saída/entrada descrita, geralmente, no domínio s, considerando condições iniciais nulas.

Considere o seguinte circuito RLC descrito no domínio de Laplace, considerando indutor e capacitor inicialmente descarregados.




Da aplicação da lei das tensões de Kirchhoff, têm-se que:

$$V_i(s) = R\,I(s) + sL\,I(s) + V_o(s) \quad (1)$$

| PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS) | CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO |
|---|---|
| LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ<br>DATA: 04/11/2024 | L3Z1 |

QUESTÃO Nº 2

E $I(s) = sC\,V_o(s)$ (2)

Substituindo (2) em (1)

$$V_i(s) = \left(sRC + s^2LC + 1\right) V_o(s) \quad (3)$$

E REESCREVENDO (3)

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + R/L\,s + 1/LC} \quad (4)$$

A Relação $\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = G(s)$ é a função de transferência desse circuito, QUE O REPRESENTA de forma única como uma fração polinomial, com um polinômio no numerador $N(s)$, que neste exemplo é $1/LC$, polinômio de GRAU 0; E com um polinômio no denominador $D(s)$, que neste exemplo é $s^2 + R/L\,s + 1/LC$, polinômio de GRAU 1. As RAÍZES do numerador SÃO chamados de ZEROS

| PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS) | CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO |
|---|---|
| LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ<br>DATA: 04/11/2024 | L3Z1 |

QUESTÃO Nº 2

da função de transferência G(s) e as raízes do denominador, chamadas de polos. Os polos da função G(s) descrevem a dinâmica do sistema.

Uma função de transferência genérica pode então ser escrita da seguinte maneira:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

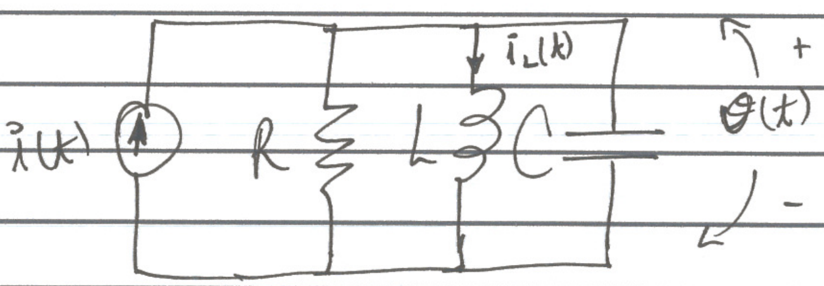
com m sendo o grau do polinômio do numerador e n o grau do polinômio do denominador. Quando $m<n$, G(s) é dita própria, quando $m>n$ G(s) é dita imprópria e quando G(s) tem $m=n$ ela é dita biprópria.

| PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS) | CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO |
|---|---|
| LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ<br>DATA: 04/11/2024 | L321 |

QUESTÃO Nº 3

Modelos de estados são modelos de sistemas que usam as referidas equações de estado de um sistema em sua representação. Uma vez conhecida a entrada e as condições iniciais e um circuito, por exemplo, ~~pod~~ pode-se de forma única determinar a ~~re sta~~ dinâmica, ou o comportamento, ou a saída desse circuito. Neste contexto, as variáveis que juntamente com as entradas determinam esse comportamento são ditas variáveis de estado nesse modelo.

Considere o seguinte circuito.




da lei dos nós:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} + i_L(t) + C\frac{dv(t)}{dt} \qquad (1)$$

| PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS) | CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO |
|---|---|
| LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ<br>DATA: 04/11/2024 | L3Z1 |

QUESTÃO Nº 3

e $v(t) = L \dfrac{di_L(t)}{dt}$ (2)

Assim

~~$i(t) = \frac{L}{R} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) + LC \frac{d^2}{dt}$~~

$$i(t) = \frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) + LC\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} \quad (3)$$

Aplicando a transformada de Laplace a (3)

$$I(s) = \frac{L}{R}\left[sI_L(s) + i_L(0^-)\right] + I_L(s) + LC\left[s^2 I_L(s) - s\, i_L(0^-) - i_L'(0^-)\right]$$

e conhecendo-se $i_L(0^-)$ (corrente inicial no indutor) e $i_L'(0^-)$ (parcela da tensão no capacitor) e a entrada $I(s)$; pode-se então determinar a resposta $i_L(t)$ de forma única. A tensão no capacitor e a corrente no indutor nesse caso, candidatam-se a variáveis de estado para esse modelo. Considerando $x_1 = \dfrac{di_L(t)}{dt}$ e $x_2 = i_L(t)$; $\dot{x}_2 = \dfrac{di_L(t)}{dt} = x_1$ e $\dot{x}_1 = \dfrac{d^2 i_L(t)}{dt^2}$

| PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS) | CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO |
|---|---|
| LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ<br>DATA: 04/11/2024 | L3Z1 |

QUESTÃO Nº 3

(3) fica da seguinte forma:

$$i(t) = \frac{L}{R} x_1 + x_2 + LC\,\dot{x}_1$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{RC} x_1 - \frac{1}{LC} x_2 + \frac{1}{LC} i(t)$$

e $\dot{x}_2 = x_1$

sendo a saída, a corrente no indutor $i_L(t) = y$ e a entrada $u = i(t)$, escrevendo na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/RC & -1/LC \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/LC \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad (4)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \qquad (5)$$

As equações matriciais (4) e (5) definem o modelo de estado do circuito paras as

| PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS) | CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO |
|---|---|
| LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ<br>DATA: 04/11/2024 | L3Z1 |

QUESTÃO Nº 3

equações de estado definidas, ~~xx~~ $x_1$ e $x_2$. Diferentemente da representação por função de transferência, o modelo de estado não é único, ou seja, um mesmo circuito pode ~~ser~~ ter várias representações de estado distintas.

Assim as equações (4) e (5) podem ser reescritas de forma genérica, como:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; matriz dos coeficientes ~~ou matriz dos estados~~, $x \in \mathbb{R}^{n}$, vetor dos estados. $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a matriz de atuadores ou matriz de entradas para os casos em que $m > 1$. $C$ a matriz de saídas $\in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a matriz de influência.

Existe ainda uma relação direta da representação no espaço de estados com a representação por função de transferên-

| **PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)** | **CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO** |
|---|---|
| LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ<br>DATA: 04/11/2024 | L3Z1 |

**QUESTÃO Nº** 3

Cia dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C\left[(sI-A)^{-1}.B + D\right]$$

obtida aplicando-se a transformada de Laplace ao modelo genérico de estado.