UFRJ

Politécnica UFRJ

CONCURSO DE PROVAS E TÍTULOS DO MAGISTÉRIO SUPERIOR
EDITAL N° 54 DE 30/01/2024 – PUBLICADO NO DOU N° 24 DE 02/02/2024

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

VAGA MC-204 – SETOR DE CIRCUITOS ELÉTRICOS E SISTEMAS LINEARES

DIA: 04 de novembro de 2024.

LOCAL: Sala 227A - Bloco H - Escola Politécnica/CT/UFRJ

CADERNO DE QUESTÕES - PROVA ESCRITA

1) Discorra amplamente sobre Utilização de transformada de Laplace na análise de circuitos, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um circuito de ordem igual ou maior a 2.
2) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando função de transferência, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.
3) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando equações de estado, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	I4U8

QUESTÃO Nº 1

A análise de Fourier aplicada a sistemas lineares é bastante utilizada ~~(aplicada)~~, porém apresenta algumas limitações, quando consideradas alguns sinais de entrada. A Transformada de Laplace é uma generalização da análise de Fourier que pode ser aplicada a todos os tipos de entrada, como degrau ou impulso.

A Transformada de Laplace é uma análise no domínio da frequência que usa a variável 'S' ~~(onde)~~ complexa, descrita como $S = \sigma + jw$, onde j é a variável complexa.

Essa transformada tem a capacidade de simplificar a análise de circuitos, uma vez que transforma a equação diferencial que descreve o sistema no domínio do tempo t para uma equação algébrica que descreve o sistema no domínio da frequência s. A solução de uma equação algébrica é mais simples que a de uma equação diferencial que pode ter ordens elevadas.

Esse modelo de solução não tem simples aplicação em sistemas não-lineares, uma vez que não é simples representar esses sistemas por uma equação diferencial linear.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	I4V8

QUESTÃO Nº 1

A Transformada de Laplace de uma função f(t) é dada por:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{t} e^{-st} f(t)$$

Para algumas funções mais conhecidas, os valores da transformada são tabelados e de fácil uso. Para cada função f(t) no domínio do tempo existe uma única correspondente F(s) no domínio da frequência.

Existem duas maneiras de utilizar a Transformada de Laplace na análise de circuitos. Ambas serão discutidas a seguir:

* A primeira maneira de aplicação é na transformada da equação de circuito. A análise inicial do sistema é feita considerando as relações de tensão e corrente nos elementos do circuito como se segue:

- Resistores: ($\cancel{v_R = R I}$) $v_R = R \cdot i$
- indutores: $v_L = L \dfrac{di}{dt}$
- capacitores: $v_C = \dfrac{1}{C} \int i \, dt$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	I4U8

QUESTÃO Nº 1

As condições iniciais dos elementos devem ser consideradas. Com isso é possivel escrever a equação diferencial que representa o circuito. A Transformada de Laplace é aplicada transformando a equação diferencial em algébrica. Utilizando operações simples é possivel encontrar a solução da análise. Para encontrar a resposta no domínio do tempo, basta aplicar a transformada de Laplace inversa.

* A segunda maneira de utilização é aplicando a transformada de Laplace diretamente aos elementos do circuito. Cada elemento pode ser transformado de acordo com:

- Resistores: $Z_R = R$
- indutores: $Z_L = sL$
- capacitores: $Z_C = \frac{1}{sC}$

Desta forma as relações de tensão e corrente serão dadas como:

- Resistores: $V_R = RI$
- indutores: $V_L = sLI$
- capacitores: $V_C = \frac{1}{sC} I$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	I408

QUESTÃO Nº 1

Uma vez convertido o circuito, soluciona-se a equação de circuito de forma algébrica simples. Novamente aplica-se a Transformada de Laplace inversa para obter a solução no domínio do tempo.

Neste caso de aplicação, elementos que tenham energia armazenada inicial terão uma representação como fontes adicionais além do elemento transformado.

A seguir será apresentado um exemplo de aplicação para facilitar o entendimento: Considere o circuito RLC paralelo mostrado a seguir:

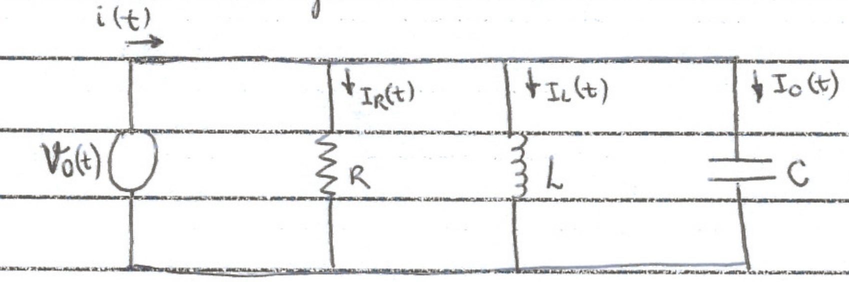

Figura 1 - Circuito RLC paralelo.

Para determinar a corrente total injetada pela fonte no circuito, pode-se escrever:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_c(t)$$

Pode-se reescrever as correntes em cada ramo pelas rela-

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	I408

QUESTÃO Nº 1

ções de tensão e corrente dos seus elementos, como:

- Resistor: $V_0(t) = R \cdot i_R(t)$
- indutor: $i(t) = \frac{1}{L}\int v_0(t)\,dt$
- capacitor: $i_C(t) = C \cdot \frac{dv_0(t)}{dt}$

Portanto:

$$i(t) = \frac{v_0(t)}{R} + \frac{1}{L}\int v_0(t)\,dt + C\frac{dv_0(t)}{dt}$$

~~(Aplicando a transformada de Laplace)~~ Reescrevendo:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{dv_0(t)}{dt}\cdot\frac{1}{R} + \frac{1}{L}v_0(t) + C\frac{d^2v_0(t)}{dt}$$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$sI(s) = \frac{sV_0(s)}{R} + \frac{1}{L}V_0(s) + Cs^2V_0(s)$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	I4U8

QUESTÃO Nº 1

Portanto:

$$I(s) = \frac{V_0(s)}{R} + \frac{V_0(s)}{sL} + sCV_0(s)$$

Conhecendo os valores da fonte e dos elementos é possível determinar algebricamente o valor de I(s) e usando a transformada de Laplace inversa, determinar i(t).

Utilizando a segunda maneira de solução poderíamos redesenhar o circuito da Figura 1 no domínio da frequência como:

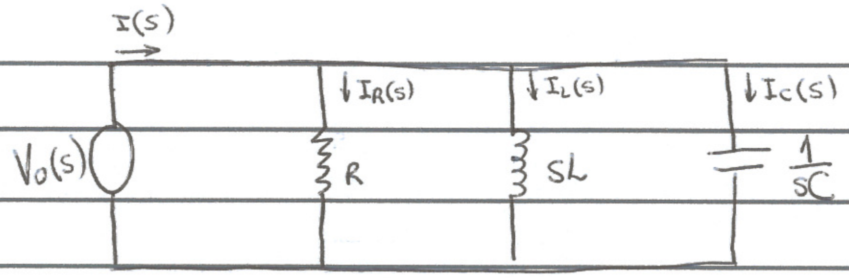

Figura 2 - Circuito RLC paralelo no domínio da frequência

Da mesma forma, temos:

$$I(s) = I_R(s) + I_L(s) + I_C(s)$$

Reescrevendo a corrente pela relação com a tensão em cada elemento, tem-se:

$$I(s) = \frac{V_0(s)}{R} + \frac{V_0(s)}{sL} + \frac{V_0(s)}{1/sC}$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	I4U8

QUESTÃO Nº 1

Esta relação é a mesma encontrada anteriormente e será resolvida da mesma maneira.

Uma vez transformada inversamente de volta ao domínio do tempo, a solução do circuito possui informações sobre a sua resposta em regime transitório e permanente.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	I4U8

QUESTÃO Nº 2

A Função de Transferência de um circuito é uma função que descreve a relação entre uma entrada e uma saída desse circuito. Essa relação pode ser entre valores de tensão e corrente, como se segue:

1* $\frac{E(s)}{I(s)}$ 2* $\frac{E(s)}{E(s)}$ 3* $\frac{I(s)}{E(s)}$ 4* $\frac{I(s)}{I(s)}$

onde o numerador indica o valor de saída e o denominador o valor de entrada. As funções de transferência 2 e 4 são admensionais; A número 1 é dada em ohms e a 3 em mhos.

Como é possível ver pelas relações apresentadas, a função de transferência de um circuito é modelada no domínio da frequência s e sua aplicação utiliza os conceitos da transformada de Laplace.

(~~O modelo de~~) A modelagem usando função de transferência é aplicado a sistemas lineares invariantes no tempo. Ela proporciona uma descrição externa do sistema com informações apenas relacionadas à entrada e saída do sistema, não tendo capacidade de informar sobre resultados de elementos internos do sistema.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	I4U8

QUESTÃO Nº 2

A função de transferência tem característica de unicidade, ou seja, um circuito pode ser descrito por uma única função que relaciona sua saída com sua entrada. Desta forma, conhecendo a função de transferência de um circuito, é possível calcular a sua resposta à qualquer tipo de sinal aplicado aos seus terminais de entrada.

Considere que um circuito possa ser descrito pela seguinte equação diferencial, onde $y(t)$ representa a saída e $u(t)$ representa a sua entrada:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{(n-1)} \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{(m-1)} \frac{d^{(m-1)} u(t)}{dt^{(m-1)}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

Aplicando a Transformada de Laplace a essa equação, tem-se:

$$a_n s^n Y(s) + a_{(n-1)} s^{(n-1)} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) =$$

$$= b_m s^m U(s) + b_{(m-1)} s^{(m-1)} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

Como a função de transferência é dada pela relação da saída $Y(s)$ e da entrada $U(s)$ no domínio da frequência, pode-se determiná-la como:

$$\cancel{\left(G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a_n s^n + a_{(n-1)} s^{(n-1)} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s} \right)}$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	I4U8

QUESTÃO Nº 2

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{(m-1)} s^{(m-1)} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{(n-1)} s^{(n-1)} + \dots + a_1 s + b_1}$$

As raízes do polinômio do numerador de G(s) são conhecidos como zeros da função de transferência e as raízes do polinômio característico no denominador de G(s) são chamados de pólos.

Os pólos de uma função de transferência dão informações sobre a estabilidade da resposta do circuito e os seus zeros indicam sobre o comportamento oscilatório da resposta transitória e seu processo de amortecimento.

Uma vez conhecida a função de transferência do circuito, é possível determinar a sua resposta a qualquer tipo de sinal de entrada. Uma característica importante é que ela também representa a resposta de um circuito a um sinal de entrada do tipo impulso unitário.

Considerando o circuito RLC paralelo apresentado na Figura 1 da questão 1 é possível determinar a função de transferência do circuito considerando como entrada a tensão $V_0(s)$ na fonte e a saída a corrente $I_C(s)$ no

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	I4U8

QUESTÃO Nº 2

capacitor. Podemos escrever a relação de tensão e corrente em cima do capacitor como:

$$V_o(s) = \frac{1}{sC} \cdot I_c(s)$$

Isolando a relação da entrada e saída do circuito, tem-se:

$$G(s) = \frac{I_c(s)}{V_o(s)} = s.C$$

Supondo uma entrada com um sinal degrau unitário, ou seja, $V_o(s) = \frac{1}{s}$, tem-se

$$I_c(s) = G(s) V_o(s) = s.C.\frac{1}{s} = C$$

Portanto, a saída do circuito, usando a sua função de transferência, será o valor do próprio capacitor, no domínio da frequência.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	I4U8

QUESTÃO Nº 3

A modelagem de sistemas lineares usando equações de estados é muito útil para sistemas invariantes no tempo e também para sistemas com parâmetros variáveis no tempo. Além disso, as equações de estado têm a capacidade de solucionar sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas, também conhecidos como MIMO.

A representação no espaço de estados é uma análise de circuitos no domínio do tempo, onde o sistema pode ser (~~defi-nido~~) descrito por equações diferenciais de primeira ordem. Essa modelagem permite uma descrição interna do sistema, provendo informações de elementos internos da rede e não apenas a relação entre a(s) saída(s) e a(s) (~~entrada(s)~~) entrada(s).

Um sistema linear pode ser descrito, portanto por suas variáveis de estado, que são o menor conjunto de variáveis necessárias para descrever o sistema e as suas relações de tensão e corrente. A representação das variáveis de estado delimita o chamado espaço de estado. O estado de um sistema pode ser descrito por um sistema de equações formado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & (1) \\ y = Cx + Du & (2) \end{cases}$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	I408

QUESTÃO Nº 3

onde:

x é o vetor de variáveis de estado

u é o vetor que representa a(s) entrada(s) do sistema

y é o vetor que representa a(s) saída(s) do sistema

A equação (1) é chamada equação de estado e é a primeira a ser resolvida. Ela relaciona a derivada primeira das variáveis de estado com elas próprias e a(s) entrada(s). A matriz A é conhecida como matriz de estados e a análise dos seus autovalores é importante para a determinação da estabilidade do sistema. Considerando um sistema com 'n' variáveis de estado, 'm' entradas e 'p' saídas a matriz A tem dimensão n×n. A matriz B relaciona as variáveis de estado e a(s) entrada(s) e tem dimensão n×m.

A equação (2) é chamada equação de saída e é a que determina a resposta do sistema. A matriz C determina o impacto das variáveis de estado na(s) saída(s) e tem dimensão p×n. A matriz D determina o impacto da(s) entrada(s) na(s) saída(s) e tem dimensão p×m.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	I4U8

QUESTÃO Nº 3

A representação por equações de estado não é única para cada sistema, dado que diferentes conjuntos de variáveis de estado resultarão em representações diferentes. Além disso, as condições iniciais dos elementos também alteram a representação do estado.

Considerando o circuito RLC em paralelo da Figura 1 na questão 1 e usando a fonte de tensão como entrada, a corrente no capacitor como saída e a queda de tensão $v_c(t)$ no capacitor como variável de estado, tem-se:

(1) $$\frac{dv_c(t)}{dt} = [A][v_c(t)] + [B][v_0(t)]$$

(2) $$i_c(t) = y(t) = [C][v_c(t)] + [D][v_0(t)]$$

A equação (1) pode ser reescrita considerando $\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{i_c(t)}{C}$;

(1) $$i_c(t) = C\left([A][v_c(t)] + [B][v_0(t)]\right)$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	I4U8

QUESTÃO Nº 3

Portanto, podemos igualar a nova equação (1) e (2) e encontrar a solução do circuito.

Também é possível fazer uma correlação entre o modelo de circuitos lineares usando equações de estado e ~~(a)~~ usando a função de transferência.