UFRJ

Politécnica UFRJ

CONCURSO DE PROVAS E TÍTULOS DO MAGISTÉRIO SUPERIOR
EDITAL N° 54 DE 30/01/2024 – PUBLICADO NO DOU N° 24 DE 02/02/2024

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

VAGA MC-204 – SETOR DE CIRCUITOS ELÉTRICOS E SISTEMAS LINEARES

DIA: 04 de novembro de 2024.

LOCAL: Sala 227A - Bloco H - Escola Politécnica/CT/UFRJ

CADERNO DE QUESTÕES - PROVA ESCRITA

1) Discorra amplamente sobre Utilização de transformada de Laplace na análise de circuitos, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um circuito de ordem igual ou maior a 2.

2) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando função de transferência, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.

3) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando equações de estado, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	H2A9

QUESTÃO Nº 1

1. Transformada de Laplace na análise de circuitos

A transformada de Laplace é uma poderosa ferramenta matemática para o entendimento e análise de circuitos, permitindo a representação de sistemas complexos de forma clara e objetiva. Isso é possível pois ao aplicarmos a transformada de Laplace a um circuito elétrico descrito por equações diferenciais ordinárias obtem-se a descrição desse mesmo sistema no domínio complexo "s". A facilitação da análise desses circuitos ocorre pois após a conversão obtida pela transformada, o sistema passa a ser descrito por equações algébricas.

1.1 Definição

A transformada de Laplace de uma função dependente do tempo, f(t), é obtida da seguinte maneira:

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	H2A9

QUESTÃO Nº 1

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t).e^{-st}.dt \qquad (1)$$

Onde s é a variável complexa, $s = \sigma + jw$, e $F(s)$ é como se representa a transformada de Laplace da função $f(t)$. Destaca-se que é possível obter $f(t)$, a partir de $F(s)$, utilizando a transformada inversa de Laplace.

1.2 Propriedades da transformada de Laplace

Para a análise de circuitos, principalmente com componentes reativos (indutores e capacitores), as propriedades da transformada de Laplace são cruciais. Na tabela 1, é possível encontrar algumas dessas propriedades.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	H2A9

QUESTÃO Nº 1

Tabela 1: Propriedades da transformada de Laplace.

Soma	$\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\}$
Produto por escalar (a)	$\mathcal{L}\{a.f_1(t)\} = a.\mathcal{L}\{f_1(t)\}$
Deslocamento no tempo	$\mathcal{L}\{e^{-at}.f_1(t)\} = F_1(s+a)$
Derivação	$\mathcal{L}\{f_1'(t)\} = s.F_1(s) - f_1(0)$

1.3 Aplicação da transformada de Laplace na resolução de circuitos.

Aplicando a transformada de Laplace a um circuito, é importante entender como cada componente será descrito.

1.3.1 Resistores (R)

A aplicação da transformada de Laplace nos resistores é direta, pois os mesmos não são componentes reativos. Dessa forma tem-se:

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	H2A9

QUESTÃO Nº 1

$$R = Z_R \qquad (2)$$

Onde Z_R é a impedância do resistor.

1.3.2. Indutores (L)

Para os indutores a equação que rege seu comportamento é dada por:

$$V_L(t) = L.\frac{di}{dt} \qquad (3)$$

Onde V_L é a tensão sobre o indutor. Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação 3, e lembrando das propriedades descritas na tabela 1 temos:

$$V_L(s) = L.\left(s.I(s) - I(0)\right) \qquad (4)$$

Onde $I(0)$ é a corrente acumulada no indutor no momento $t=0$.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	H2A9

QUESTÃO Nº 1

1.3.3 Capacitores

Por se tratar de um componente reativo sua análise é semelhante a dos indutores. Dessa forma de maneira análoga, descreve-se abaixo o comportamento do capacitor no domínio do tempo:

$$V_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^{\infty} i(t).dt \qquad (5)$$

Onde Vc é a tensão sobre o capacitor. Aplicando a transformada de Laplace de ambos os lados da equação 5, tem-se:

$$V_c(s) = \frac{1}{Cs}.I(s) \qquad (6)$$

Politécnica UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	H2A9

QUESTÃO Nº 1

1.4 Exemplo:

Dado um circuito RLC em série, como o descrito na figura 1. Deseja-se obter a equação que descreve esse circuito no domínio da frequência, considerando o capacitor e o indutor totalmente descarregados em $t = 0$.

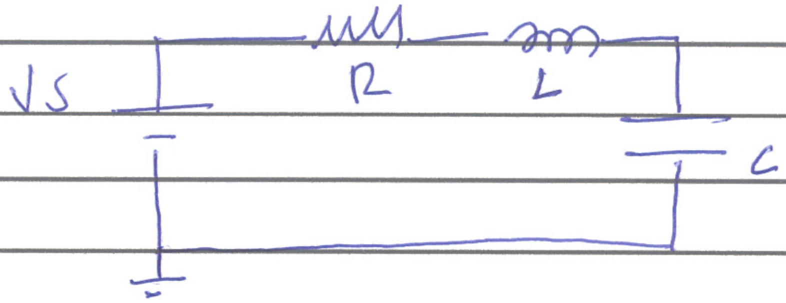

figura 1: Circuito RLC série.

Aplicando-se a lei de Kirchhoff das malhas, obtem-se a equação do sistema no domínio do tempo.

$$V_s(t) = R.i(t) + L s\, i(t) + \frac{1}{C}\int_0^{\infty} i(t).dt \qquad (7)$$

Considerando Vs como uma fonte constante e aplicando a transformada de Laplace a equa-

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	H2A9

QUESTÃO Nº 1

ção (7) tem-se:

$$V_s = I(s).\left[R + Ls + \frac{1}{Cs}\right] \qquad (8)$$

Obtendo então:

$$I(s) = \frac{V_s.C.s}{Ls^2 + RCs + 1} \qquad (9)$$

É possível obter i(t) aplicando a transformada inversa de Laplace na equação 9. Para isso a maneira sistemática, envolve o uso de expansão por frações parciais ou mesmo pelo auxílio de tabelas de transformadas.

1.5 Conclusão

O uso da transformada de Laplace, permite um entendimento mais claro de um sistema. Permitindo também uma abordagem sistemática na re-

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	H2A9

QUESTÃO Nº 1

lução de circuitos complexos, onde existe a presença de diversos componentes reativos. Além disso seu uso está relacionado diretamente com a descrição de sistemas por meio de função de transferência, onde é possível estudar a relação de corrente e tensão entre os componentes do circuito.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	H2A9

QUESTÃO Nº 2

2. Modelo de sistemas lineares usando função de transferência.

O modelo de sistemas lineares utilizando funções de transferencia, é uma ferramenta que permite uma simplificação na análise e sintese de circuitos eletricos. Relacionando a entrada e a saida de sistemas, a função de transferência permite a análise de circuitos complexos estudando a relação entre componentes específicos desse circuito. Essa relação entre a entrada e a saída do circuito contempla tanto a análise do sistema em regime permanente como no transitório.

2.1 Definição

Seja $g(s)$, a função de transferencia de um sistema no domínio da frequência. Então $g(s)$ pode ser descrita como:

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	H2A9

QUESTÃO Nº 2

$$g(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \qquad (10)$$

Onde Y(s) é a representação da saída do sistema no domínio da frequência e U(s) a entrada do sistema também no domínio da frequência.

2.2 Função de transferência e análise de estabilidade de um sistema.

Seja a função de transferência de um sistema definida por H(s), é possível compreender a estabilidade desse sistema ao analisarmos o polinômio do Numerador de H(s), N(s), e o denominador de H(s), D(s).

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad (11)$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	H2A9

QUESTÃO Nº 2

Ao analisarmos o Numerador N(s) e obtermos as raízes desse numerador encontramos os zeros desse sistema, ou seja os valores de s para o qual anulamos a saída do sistema. Já analisando D(s) e obtendo suas raízes, determinamos os polos do sistema, ou seja valores para os quais o sistema se torna indeterminado.

A análise de estabilidade de um sistema esta intimamente relacionada com os pólos da função de transferência. Um sistema pode ser estável instável e marginalmente estável. De maneira que:

• Sistema estável: A saída tende, converge, para um valor específico. Nesse sistema os pólos se encontram no semi-plano esquerdo, ou seja todos possuem parte real negativa.

• Sistema instável: A saída não converge para um valor específico. Nesse sistema ao menos um pólo tem parte real positiva

Politécnica UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	H2A9

QUESTÃO Nº 2

• Marginalmente estável: A saída converge para uma faixa de valores. Nesse sistema tem-se polos conjugados puramente imaginários

Exemplo:

Seja um circuito RLC em série, como o circuito na figura 2, deseja-se obter a função de transferência entre a tensão da fonte V_{IN} (entrada) e a corrente que passa pelo indutor (saída)

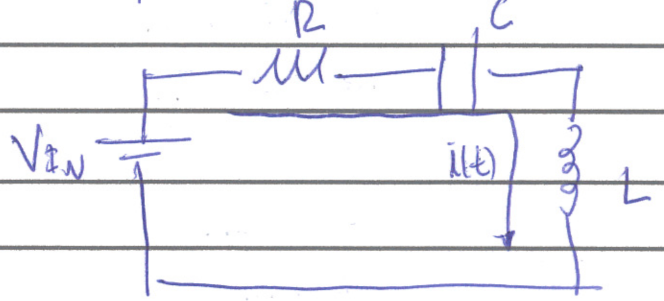

figura 2: Circuito RLC série.

A equação que descreve esse sistema no domínio da frequência, considerando $V_C(0) = 0$ e $I_L(0) = 0$ é dada por:

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	H2A9

QUESTÃO Nº 2

$$V_{IN} = R.I(s) + Ls\,I(s) + \frac{1}{Cs} I(s) \qquad (12)$$

Escrevendo a equação 12 como uma função de transferência obtem-se:

$$\frac{I(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{Cs}{Ls^2 + RCs + 1} \qquad (13)$$

2.4 - Conclusão

O modelo de sistemas lineares utilizando função de transferência, de fato auxilia na analise de circuitos complexos. Permitindo um entendimento profundo sobre o sistema, a partir da analise dos polinômios do numerador e denominador do sistema.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	H2A9

QUESTÃO Nº 3

3. Modelo de sistemas lineares utilizando equações de estado.

O modelo de sistemas lineares utilizando equações de estado é uma ferramenta que permite o entendimento das relações dinâmicas de um sistema. Diferente da representação por funções de transferência, que busca relacionar variáveis do sistema (entrada e saída), na representação por espaço de estados toda a dinâmica do sistema é representada, permitindo assim uma melhor representação de sistemas de ordens superior.

3.1 Definição.

Dado um sistema linear o mesmo pode ser representado utilizando equações de estado da seguinte forma:

Politécnica UFRJ	UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO ESCOLA POLITÉCNICA DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	H2A9

QUESTÃO Nº 3

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \qquad (14)$$
$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$$

Onde:

• $x(t)$ é o vetor de espaço, que contém as variáveis de estado do sistema

• $\dot{x}(t)$ é a derivada do vetor de estado, que representa como as variáveis de estado variam com o tempo

• $u(t)$ é a entrada do sistema

• $y(t)$ é a saída do sistema

• A é a matriz que correlacionada as variáveis de estado, também conhecida como matriz de estado

• B é matriz que correlaciona a entrada

• C é a matriz que correlaciona o estado do sistema com a saída

• D é a matriz de realimentação, que correlaciona o quanto a entrada influência diretamen-

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	H2A9

QUESTÃO Nº 3

te a saída.

3.2. Matriz de estado e estabilidade.

Analisando-se a matriz de estado (A) é possível de maneira simples entender o comportamento do sistema no regime permanente. Isto é possível pois ao analisarmos os autovalores da matriz de estado, podemos determinar a estabilidade do sistema. De maneira que se os autovalores da matriz A forem todos negativos o sistema será estável, ao passo que se ao menos um for positivo o sistema será instável.

A matriz de estado em conjunto com a matriz B forma a matriz de controlabilidade do sistema, que se possuir inversa, atesta a controlabilidade do mesmo. A mesma ideia ocorre com a matriz C, porém em conjunto com a A forma a matriz de observabilidade do sistema, que se possuir uma inversa atesta a observabilidade do sistema.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	

QUESTÃO Nº

3.3 Exemplo

Dado um circuito série RLC, como descrito na figura 3, é possível determinar uma representação no espaço de estados da seguinte forma

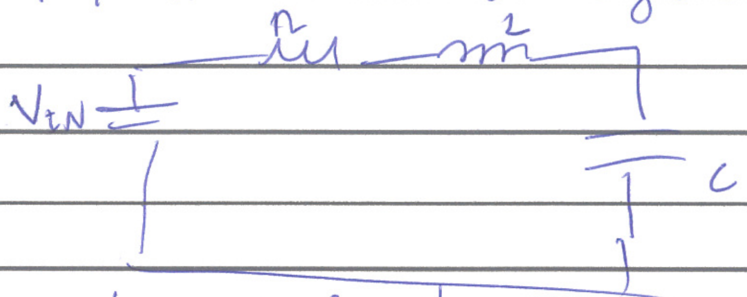

figura 3: circuito RLC série

Aplicando a lei de kirchhoff para as tensões tensão:

$$\cancel{V_{IN} = R.i(t) + L\,d.i(t) + 1}$$

$$V_{IN} = R\,i(t) + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt \qquad (15)$$

Derivando tensão:

$$\frac{dV_{IN}}{dt} = R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt} + \frac{1}{C} i \qquad (16)$$