UFRJ

Politécnica UFRJ

CONCURSO DE PROVAS E TÍTULOS DO MAGISTÉRIO SUPERIOR
EDITAL N° 54 DE 30/01/2024 – PUBLICADO NO DOU N° 24 DE 02/02/2024

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

VAGA MC-204 – SETOR DE CIRCUITOS ELÉTRICOS E SISTEMAS LINEARES

DIA: 04 de novembro de 2024.

LOCAL: Sala 227A - Bloco H - Escola Politécnica/CT/UFRJ

CADERNO DE QUESTÕES - PROVA ESCRITA

1) Discorra amplamente sobre Utilização de transformada de Laplace na análise de circuitos, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um circuito de ordem igual ou maior a 2.

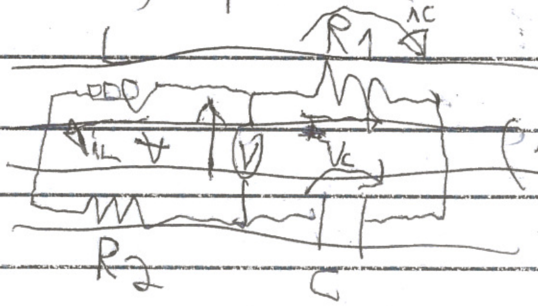
2) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando função de transferência, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.

3) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando equações de estado, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.

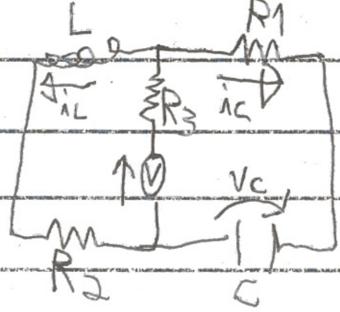
PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G741

QUESTÃO Nº 1, parte 1

Considere que temos um circuito linear composto de fontes, resistores, capacitores e indutores, como o ilustrado abaixo:



(1)



(1)

Vamos considerar que temos, como objetivo, encontrar uma tensão ou corrente de um dos componentes, como ~~v_c da figura (1)~~, a corrente i_L da Figura (1).

A fim de atingir esse ~~objeti~~ ~~obje~~ objetivo, o primeiro passo que devemos dar é obter equações integro-diferenciais que relacionam as grandezas do circuito.

Por exemplo, se aplicarmos ~~tensões~~ as equações de ~~malhas~~ laços no circuito (1), obteremos:

$$\cancel{\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} i_L\,dt + R_2 i_L - R_3 i_C = V}$$

$$\cancel{R_1 i_C + C\frac{di}{}}$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	6741

QUESTÃO Nº 1, parte 2

$$L\frac{di_L}{dt} + R_2 i_L - R_3 i_C = V$$

(2)

$$R_1 i_C + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C \, dt - R_3 i_L = V$$

Para resolver equações integro-diferenciais como mostrada em (2), vamos usar a transformada de Laplace. Faremos isso pois isso nos permitirá obter ~~uma relação~~. equações algébricas do circuito. ~~definida~~

Dado uma função $f(t)^{*}$, a transformada de Laplace de $f(t)$ é definida como:

~~$\mathcal{L}[f(t)] = \int$~~

$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$, em que $s = \sigma + j\omega$ é uma variável complexa.

Dependendo ~~da~~ do valor de σ, a função acima pode convergir. Isso nos permite definir ~~diversos~~ diversas transformadas de funções básicas.

*Note que para usar a transformada, estamos considerando que $f(t) = 0$ para $t < 0$

Politécnica UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	6741

QUESTÃO Nº 1

$\cancel{\mathcal{L}[\delta}$ $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$; $\mathcal{L}[\theta(t)] = \frac{1}{s}$; $\mathcal{L}[\frac{t^n}{n!}] = \frac{1}{s^{n+1}}$

$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$; $\mathcal{L}[e^{-at}\frac{t^n}{n!}] = \frac{1}{(s+a)^n}$; em que:

. $\delta(t)$ é o impulso unitário ~~...~~ tal que $\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$ e $\int_a^b \delta(t)\,dt = 1$ para $a < 0 < b$. Note que $\delta(t)$ é infinito em $t = 0$;

. $\theta(t)$ é o degrau unitário tal que $\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$.

Além das transformadas acima, a transformada de Laplace possui diversas propriedades que ~~são~~ serão bem úteis:

$\cancel{\mathcal{L}}$ $\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \cancel{\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)]}\ \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$;

$\mathcal{L}[a f(t)] = a\,\mathcal{L}[f(t)]$;

$\mathcal{L}[\frac{d f(t)}{dt}] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$.

$\mathcal{L}[\int_0^t f(\lambda)\,d\lambda] = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{s}$.

Note que as propriedades acima permitem transformar derivadas e integrais em formas algébricas. Logo

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	6741

QUESTÃO Nº 1

Isso nos permite transformar as equações integro-diferenciais de um circuito em uma equação algébrica.

Considere novamente ~~as equaçõ~~ uma das equações que trabalhamos antes:

$$L\frac{di_L}{dt} + R_2 i_L - R_3 i_C = V.$$

Se aplicarmos a transformada na equação acima, obteremos:

$$\mathcal{L}\left[L\frac{di_L}{dt} + R_2 i_L - R_3 i_C\right] = \mathcal{L}[V] \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\mathcal{L}[L}\ L\,\mathcal{L}\left[\frac{di_L}{dt}\right] + R_2\,\mathcal{L}[i_L] - R_3\,\mathcal{L}[i_C] = \mathcal{L}[V] \Leftrightarrow$$

$$-L i_L(0) + L\,\mathcal{L}[i_L].s + R_2\,\mathcal{L}[i_L] - R_3\,\mathcal{L}[i_C] = \mathcal{L}[V] \Leftrightarrow$$

$-L i_L(0) + L \hat{I}_L s + R_2 \hat{I}_L - R_3 \hat{I}_C = \hat{V}$, em que

$\hat{I}_C = \mathcal{L}[i_C]$

$\hat{I}_L = \mathcal{L}[i_L]$

$\hat{V} = \mathcal{L}[V]$.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	6741

QUESTÃO Nº 1

Lembre-se que a outra equação era definida como

$$R_1 i_C + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C\,dt - R_3 i_L = V$$

Para que possamos transformar a equação acima, que possui uma integral, vamos separá-la em ~~$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C dt - \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C dt + \frac{1}{C}\int_{-\infty}$~~

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C\,dt = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_C\,dt + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i_C\,dt.$$

Note que $\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i_C\,dt$ é idêntico ~~ao~~ à tensão inicial $V_C(0)$, assim, podemos escrever que

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C\,dt = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_C\,dt \cancel{+ V_C(t)}\ \theta(t)\,V_C(0).$$

Assim, podemos reescrever

$$\cancel{R_1 i_C + \frac{1}{C}\int_{-\infty}}$$

$$R_1 i_C + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_C\,dt + \theta(t)\,V_C(0) - R_3 i_L = V,$$

Como $\mathcal{L}[\int_0^t i_C\,dt] = \frac{\hat{I}_C}{s}$ e $\mathcal{L}[\theta(t)] = \frac{1}{s}$, temos que a transformada da ~~fun~~ função acima é:

$$R_1 \hat{I}_C + \frac{1}{Cs}\hat{I}_C + \frac{V_C(0)}{s} - R_3 \hat{I}_L = V.$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	6741

QUESTÃO Nº 1

Finalmente, podemos reescrever ~~a função em~~ equações algébricas que relacionam ~~a~~ ~~...~~ as grandezas.

$$\cancel{L\hat{I}_L s - L i_L(0) + R_2 \mathcal{L}[i_L] - R_3 \mathcal{L}[i_C]}$$

$$-L i_L(0) + L\hat{I}_L s + R_2\hat{I}_L - R_3\hat{I}_C = \hat{V}$$

$$R_1\hat{I}_C + \frac{1}{Cs}\hat{I}_C + \frac{1}{s}V_C(0) - R_3\hat{I}_L = \hat{V},$$

Como a equação é algébrica, podemos isolar uma das variáveis, ~~obtendo~~ ~~Se quisermos isolar $\hat{I}_L$, obteremos:~~

Considere que ~~$V = 0(t)$~~, ~~$V =$~~ $V = \delta(t)$ (um impulso unitário), $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$, $L = 2H$, ~~e~~ $C = \frac{1}{2}F$, $i_L(0) = 1A$ e $V_C(0) = 0V$.

~~Au~~ Como $\hat{V} = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$, temos que a equação acima se torna:

$$\cancel{2i_L(0)} - 2 + 2\hat{I}_L s + \hat{I}_L - \hat{I}_C = 1$$

$$\hat{I}_C + \frac{2}{s}\hat{I}_C + \cancel{\;\;} - \hat{I}_L = 1.$$

Note que podemos isolar $\hat{I}_L$, obtendo

$$\hat{I}_L = \frac{2s+3}{2s^2+6s+2}.$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	

QUESTÃO Nº 1

Para obter $i_L(t)$, precisamos obter a transformada inversa de I_L. Embora seja difícil de obter ~~a~~ transforma da inversa da fração acima, note que nós podemos reescrevê-la como:

$$\cancel{\frac{2s+3}{2s^2+6s+2} = \frac{2(s+3)}{2(s+2)(s+4)} = \frac{2(s+3)}{2(s+1)(s+2)} = s+3}$$

$$\frac{2s+3}{2s^2+6s+2} = \frac{2(s+1,5)}{2(s+1)(s+2)} \cancel{\neq} = \frac{s+1,5}{(s+1)(s+2)}$$

A partir da fração acima, podemos realizar uma decomposição em frações parciais, em que

$$\cancel{2(s+1,5)}\ \frac{s+1,5}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)}$$

Para achar ~~K1 e K2~~, ~~pode~~ K_1, podemos multiplicar os dois lados da equação por $(s+1)$ e fazer $s \to -1$, assim:

$$\left.\frac{(s+1)(s+1,5)}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=-1} = \left.\frac{(s+1)K_1}{s+1}\right|_{s=-1} + \left.\frac{(s+1)K_2}{s+2}\right|_{s=-1} \therefore \frac{(-1+1,5)}{(-1+2)} = K_1, \text{ logo,}$$

$K_1 = 0,5/1 = 0,5.$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G741

QUESTÃO Nº 1

Fazendo o mesmo raciocínio para K_2, temos que

$$K_2 = \frac{-2+1,5}{(\cancel{s}-2+1)} = \frac{-0,5}{-1} = 0,5.$$

Logo, temos que $\frac{s+1,5}{(s+1)(s+2)} = \frac{0,5}{s+1} + \frac{0,5}{s+2}$.

O método acima será mostrado em mais detalhes na questão 2. De qualquer forma, como

$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$, temos que a transformada da função acima será $0,5e^{-t} + 0,5e^{-2t}$. Portanto, a corrente $i_L(t) = 0,5e^{-t} + 0,5e^{-2t}$ A. ~~Note que~~

~~Port~~ Em conclusão, para usar a transformada de Laplace para a resolução de circuitos, temos que fazer os seguintes passos:

1.) Obter as equações integro-diferenciais do circuito
2) Realizar a transformada de ~~L~~ Laplace sob essas equações
3) Isolar ~~uma~~ ~~d~~ o valor ~~des~~ desejado e fazer a decomposição em frações parciais.
4) Realizar a transformada inversa dessas frações parciais para obter o valor.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G741

QUESTÃO Nº 2

Nesta questão, vamos discutir sobre sistemas lineares, causais e invariantes no tempo. ~~Vamos considerar inicialmente tem o TI~~

~~Como o sistema é linear~~

~~Este sistema possui~~

Vamos considerar que o sistema possui uma entrada $u(t)$ e uma saída $y(t)$ de forma que

$$u(t) \rightarrow \boxed{\text{sistema}} \rightarrow y(t)$$

Como o sistema é linear, temos a ~~seguinte~~ seguintes propriedades:

. Se a resposta de $u(t)$ é $y(t)$, então a resposta de $a\,u(t)$, para uma constante a, é $a\,y(t)$.

. Se as respostas de $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são $y_1(t)$ e $y_2(t)$, ~~então~~ ~~a~~ respectivamente, então a resposta de $u_1(t)+u_2(t)$ será $y_1(t)+y_2(t)$.

Politécnica UFRJ	UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO ESCOLA POLITÉCNICA DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G7Y1

QUESTÃO Nº 1

~~vamos considerar agora que obtivemos~~
~~Note que além da entra~~
Vamos considerar agora que o sistema linear pode ser escrito por uma equação diferencial:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 u^{(m)}(t) + b_1 u^{(m-1)}(t) + \dots + b_m u(t), \quad (1)$$

Neste caso, como o sistema é uma equação diferencial ~~ele está sujeito a~~ de ordem n, ele está sujeito a n condições iniciais. Baseado no princípio da superposição, vamos dividir a resposta $y(t)$ em ~~a~~

$$y(t) = y_{ZS}(t) + y_{ZI}(t),$$

em que $y_{ZS}(t)$ é a resposta de estado nulo, ~~em que~~ onde as condições iniciais são consideradas nulas, e y_{ZI} é a resposta de entrada nula, em que $u(t)$ é considerado como nulo, ou seja, $u(t) = 0$.

A partir de agora, vamos considerar que $y_{ZS}(t) = 0$, de forma que ~~$y_{ZI}(t)$~~ $y(t) = y_{ZI}(t)$.

FOLHA Nº 10

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G741

QUESTÃO Nº 2

~~Item~~ Para resolver este sistema, vamos usar a transformada de Laplace. Para uma função $f(t)$ definida para $t>0$, temos que a sua transformada de Laplace é dada por: $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$.

Se todas as condições iniciais forem nulas, podemos enunciar a seguinte propriedade:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = \cancel{s^n \mathcal{L}[f^{(n)}} \; s^n \mathcal{L}[f(t)].$$

Assim, essa propriedade nos permite transformar a equação diferencial (1) em:

$$\cancel{a_0 \hat{Y} s^n + a_1 \hat{Y} s^{n-1} + \dots + a_n Y = b_0 \hat{Y} s^m + b_1 \hat{Y} s^{m-1} + \dots + b_m}$$

$$a_0 \hat{Y} s^n + a_1 \hat{Y} s^{n-1} + \dots + a_n \hat{Y} = b_0 \hat{U} s^m + b_1 \hat{U} s^{m-1} + \dots + b_m \hat{U},$$

em que $\hat{Y} = \mathcal{L}[y(t)]$ e $\hat{U} = \mathcal{L}[u(t)]$.

Note que a equação acima é algébrica. Portanto, podemos isolar $\hat{Y}$ e $\hat{U}$, obtendo:

$$\hat{Y}(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) = \hat{U}(b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots b_m)$$, assim

$$\cancel{\hat{Y} = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots b_m}$$

$$\cancel{\hat{U} =} \; \frac{\hat{Y}}{\hat{U}} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{m-1} + \dots + a_n},$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G741

QUESTÃO Nº 2

~~Nós também chamamos $\hat{Y}/\hat{U}$ como $H(s)$, que~~

A expressão $\hat{Y}/\hat{U}$ também é ~~denotado~~ denotada por $H(s)$, que se chama de função de transferência.

~~Portanto~~, Note que $\hat{Y} = H(s)\hat{U}$; logo, podemos encontrar $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\hat{Y}) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)\hat{U}]$, em que $\mathcal{L}^{-1}[\cdot]$ denota a Laplace inversa de uma função. ~~Por~~

~~A~~ Para que possamos encontrar a resposta acima, precisamos obter algum método para obter a Laplace inversa de $H(s)\hat{U}(s)$. Para isso, vamos lembrar as definições de algumas transformadas de Laplaces de funções simples:

$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$, em que $\delta(t)$ é um impulso unitário

$\mathcal{L}[\theta(t)] = \frac{1}{s}$, em que $\theta(t)$ é um degrau unitário,

$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$, e

$\mathcal{L}[\frac{t^n}{n!} e^{-at}] = \frac{1}{(s+a)^2}$,

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

Politécnica UFRJ

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G7Y1

QUESTÃO Nº 2

Vamos considerar que $u(t)$ é uma das equações acima, de forma que a ~~multiplicação~~ multiplicação $H(s)\hat{U}(s)$ será uma fração de polinômios:

$$H(s)\hat{U}(s) = \frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{a_0 s^n + \dots + a_n},$$

~~De~~ Como o sistema é causal, temos que $m \leq n$. A fim de obter a transformada inversa de $H(s)\hat{U}(s)$, ~~ao~~ vamos decompô-lo ~~em frações parciais de forma que possamos usar as transformadas básicas acima~~ para ~~resolver~~ somas de frações mais simples, ~~que por sua vez podem~~ que tem a forma das transformadas simples mostradas anteriormente.

~~Primeiramente, a~~ Inicialmente, considere que $m = n$. Neste caso, podemos realizar a seguinte decomposição:

$$\frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{a_0 s^n + \dots + a_n} = \cancel{R}\, \frac{Q(s)}{D(s)} + \cancel{R(s)}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	6741

QUESTÃO Nº 2

Em que $D(s) = a_0 s^n + \dots + a_n$, $Q(s)$ é o resultado da divisão de $b_0 s^m + \dots + b_m$ por $D(s)$ e $R(s)$ é o resto da divisão. Note que a transformada inversa de R será um impulso $R\delta(t)$.

Vamos considerar agora que temos

~~$G(s) = \frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{a_0 s^n + \dots + a_n}$ em que $n > m$.~~

~~É possível reescrever $a_0 s^n + \dots + a_n$~~ como:

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{a_0 s^n + \dots + a_n}, \text{ em que } n > m.$$

É possível reescrever $a_0 s^n + \dots + a_n$ como

$a_0(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)$, em que

$p_i, i=1,\dots,n$, é uma ~~polinômio~~ raiz de $a_0 s^n + \dots + a_n$.
~~Ar~~ Suponha, inicialmente, que todas essas raízes são distintas. Neste caso, podemos decompor $G(s)$ como

$$G(s) = \frac{K_1}{s+p_1} + \frac{K_2}{s+p_2} + \dots + \frac{K_n}{s+p_n},$$ em que

K_i pode ser encontrado com $K_i = (s+p_i)G(s)\big|_{s=-p_i}$, para $i=1,\dots,n$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G741

QUESTÃO Nº 2

~~Caso o polinômio tenha raízes~~

Caso uma raiz p_i tenha multiplicidade K, ao invés de decompor ~~os~~ componentes de p_i como

$$\frac{K_1}{s+p_i} + \frac{K_2}{s+p_i} \cdots + \frac{K_K}{s+p_i}$$ (o que seria errado),

Vamos ~~decomposto~~ lo decompô-lo como:

$$\frac{K_1}{(s+p_i)^K} + \frac{K_2}{(s+p_i)^{K-1}} + \cdots + \frac{K_K}{s+p_i}$$, em que

$$K_1 = G(s)(s+p_i)^K \Big|_{s=p_i}, \quad K_2 = \frac{d}{ds} G(s)(s+p_i)^K, \ldots$$

$$K_n = \frac{d^K}{ds^K} G(s)(s+p_i)^K.$$

Portanto, aplicando todos os métodos acima é possível obter frações parciais simples e tais que suas transformadas inversas são fáceis de serem obtidas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

Politécnica UFRJ

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	6741

QUESTÃO Nº 2

Exemplo: Considere a seguinte função de transferência: $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$,

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$, em que $\xi = 1$

Obtenha a resposta do sistema ao degrau unitário $\theta(t)$.

Note que a resposta do sistema no domínio da transformada de Laplace é dado por

$$Y(s) = H(s)U(s),$$

como $u(t) = \theta(t)$, então $U(s) = \frac{1}{s}$; assim, temos que

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}.$$

Como $\xi = 1$, então

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{s^2+2\omega_n s+\omega_n^2}$$

Note que $s^2+2\omega_n s+\omega_n^2$ tem a raiz $-\omega_n$ com multiplicidade 2, assim, temos que

$$\cancel{Y(s) = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}} \quad Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G741

QUESTÃO Nº 2

~~Vamos~~ Vamos agora realizar a decomposição em frações parciais:

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+\omega_n)^2} + \frac{K_3}{(s+\omega_n)},$$

A partir disso, temos que

$$K_1 = Y(s)(s)\Big|_{s=0} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = 1$$

~~$K_2 = Y(s)(s=-\omega_n)|$~~ $K_2 = Y(s)(s+\omega_n)^2\Big|_{s=-\omega_n} =$

$= \dfrac{\omega_n^2}{s}\Big|_{s=-\omega_n} = -\omega_n$, por último:

$$K_3 = \frac{d}{ds} Y(s)(s+\omega_n)^2\Big|_{s=-\omega_n} = \cancel{\frac{d}{ds}} \frac{\omega_n^2}{} =$$

$= \dfrac{\omega_n}{-s^2}\Big|_{s=-\omega_n} = -1$. Assim, ~~$Y(s) = \frac{K_1}{} \frac{1}{s} +$~~ $Y(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2} - \dfrac{1}{(s+\omega_n)}$, de forma que a resposta é $y(t) = \theta(t) - \omega_n t e^{-\omega_n} - e^{-\omega_n}$, para $t > 0$

Lembre-se que $\theta(t)$ é definido como um degrau unitário.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	6741

QUESTÃO Nº 3

Considere que temos um sistema linear que ~~pode ser descrito como uma~~ invariante no tempo que pode ser descrito por uma equação diferencial. Uma forma alternativa de escrevê-lo é através de uma equação de espaço de estados.

~~Considere que o sistema tem p entradas e q saídas.~~
~~O sistema pode ser~~
Vamos considerar que o sistema é SISO, ou seja, ele possui apenas uma entrada e uma saída. Neste caso, ele pode ser descrito ~~como~~ da seguinte forma:

$$\cancel{\dot{x} = Ax + Bu} \qquad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$\cancel{y = Cx + Du}, \qquad y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

em que $x(t) \in R^n$ é um vetor de n estados, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times 1}$ e $C \in R^{1 \times n}$ são matrizes e D é uma constante

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	6741

QUESTÃO Nº 3

Note que o sistema é descrito em função de matrizes e equações diferenciais de primeira ordem. É importante notar que mesmo que ele só possua ~~equações~~ sistemas diferenciais de primeira ordem, ele é capaz de modelar sistemas de ordem maior.

Vamos agora encontrar a resposta do sistema. Para isso, vamos multiplicá-lo pela esquerda pela exponencial matricial e^{-At}:

$$\cancel{e^{-At}\dot{x} = e^{-At}Ax + e^{-At}Bu \Rightarrow}$$

$$\cancel{e^{-At}\dot{x} - e^{-At}Ax = e^{-At}Bu \quad (1)}$$

~~Note que~~ $\cancel{e^{-At}\dot{x} - e^{-At}A =}$

$$e^{-At}\dot{x}(t) = e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t)$$

$$e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}Bu(t) \quad (1)$$

Note que $e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) = \cancel{dA}\ \cancel{\frac{de^{-At}x(t)}{dt}\Big|_0^t}\ \frac{de^{-At}x(t)}{dt}\Big|_0^t,$

Assim, $\frac{de^{-At}x(t)}{dt}\Big|_0^t = e^{-At}Bu(t)$, e

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G741

QUESTÃO Nº 3

$$\cancel{e^{A}}\ e^{-A\lambda}x(\lambda)\Big|_0^t = \int_0^t e^{-A\lambda}Bu(\lambda)d\lambda \iff$$

$$e^{-At}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\lambda}Bu(\lambda)d\lambda \iff$$

$$\cancel{x(t) = x}\quad x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\lambda}Bu(\lambda)\,d\lambda$$

Assim, $x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{-A(t-\lambda)}Bu(\lambda)\,d\lambda$.

Finalmente, a resposta $y(t)$ será

$$y(t) = C\left(e^{At}x(0) + \int_0^t e^{-A(t-\lambda)}Bu(\lambda)\,d\lambda\right) + Du(t).$$

~~Note que para obter a resposta acima, preci~~

~~Alternativamente, po~~

Para obter a resposta acima, precisamos calcular e^{At}.

~~Exis Existem diversas formas de computar e^{At}.~~

~~Nesta questão, eu irei mostrar como computar através da análise de decomposição de e^{At} em uma matriz mais fácil de resolver.~~

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	6741

QUESTÃO Nº 3

Existem diversas formas de encontrar e^{At}. Nesta questão mostrarei como obter e^{At} através da análise da decomposição de e^{At} em uma matriz mais fácil de se resolver.

Seja A uma matriz n×n. A partir da análise dos seus autovetores e autovalores, podemos decompor A como $A = VJV^{-1}$, em que V é uma matriz que possui os autovalores ~~no~~ ordinários e generalizados de A, e J é uma matriz de blocos de Jordan, em que a diagonal é formada ~~por~~ pelos autovalores de A e, para cada ~~auto~~ valor λ_i com multiplicidade k, temos um bloco na forma

$$J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	6741

QUESTÃO Nº 3

~~Note que qualquer função matricial f(A) pode~~
Note que essa decomposição nos permite escrever

$$e^{At} = \cancel{V e^{Jt} V^{-1}} = V e^{Jt} V^{-1}$$

~~A partir da observação~~
Para cada bloco de Jordan $J_{\lambda i}$, ~~quem~~ ~~to~~ temos que o espéctro de ~~q~~ e^{At}_{K-1} em $J_{\lambda i}$ é dado como

$$e^{\lambda i} \cancel{J_{\lambda i}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{K-1}}{K-1!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{K-2}}{K-2!} e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

Assim, podemos obter ~~R~~ $e^A = V e^J V^{-1}$, em que ~~R~~ e^J é obtido como mostrado acima. Isso nos permitirá encontrar a ~~resta~~ resposta do ~~a~~ modelo de espaço de estados.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G7Y1

QUESTÃO Nº 3

Exemplo:
Considere o seguinte modelo em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Vamos primeiramente encontrar a decomposição de A como VJV^{-1}:
~~Aq~~ Note que A só possui um autovalor: -1, com multiplicidade 2. Além disso, ele está associado com o autovalor $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e o autovalor generalizado $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, assim: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
Assim, como $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ é um bloco de Jordan, temos que $e^{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$

QUESTÃO Nº 3

Com isso, temos que

$\cancel{e^{A} = [}$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$\cancel{[e^{-t}}$

$$\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix},$$

Assim, podemos ~~agora~~ encontrar as respostas do sistema. Vamos analisar dois casos:

Politécnica UFRJ	UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO ESCOLA POLITÉCNICA DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G741

QUESTÃO Nº 3

~~Se $u(t)=0$ e $x(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$~~ $x(0)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$,

~~Temos que a resposta será~~

$$\cancel{y(t)=e^{At}x(0)}$$

Se a entrada for nula e a condição inicial for $x(0)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, então

$$y(t)=Ce^{At}x(0)=[0\ 1]\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ te^{-t} & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=$$

$$[0\ 1]\begin{bmatrix}e^{-t}\\ te^{-t}+2e^{-t}\end{bmatrix}=te^{-t}+2e^{-t}.$$

Se a condição inicial for nula e a entrada for um degrau unitário $u(t)=\theta(t)$, então

Politécnica
UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G7V1

QUESTÃO Nº 3

$$y(t) = \int_0^t C e^{A(t-\lambda)} B u(\lambda)\, d\lambda =$$

$$\int_0^t [0\ 1] \begin{bmatrix} e^{-(t-\lambda)} & 0 \\ (t-\lambda) e^{-(t-\lambda)} & e^{-(t-\lambda)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \theta(t)\, d\lambda =$$

$$\int_0^t [0\ 1] \begin{bmatrix} \theta(t) e^{-(t-\lambda)} \\ (t-\lambda) e^{-(t-\lambda)} \theta(t) \end{bmatrix} d\lambda =$$

$$\int_0^t (t-\lambda) e^{-(t-\lambda)} \theta(t)\, d\lambda =$$

$$\int_0^t t e^{-t} e^{\lambda} d\lambda - \cancel{t} \int_0^t \lambda e^{-t} e^{\lambda} d\lambda =$$

$$t e^{-t} \int_0^t e^{\lambda} d\lambda - e^{-t} \int_0^t \lambda e^{\lambda} d\lambda = \ldots$$

Continuando este cálculo, encontraríamos a resposta.
Note que se ~~continuarmos as respos~~ somarmos as respostas dos dois casos, podemos obter a resposta do sistema a condição inicial $x(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e entrada $u(t)=\theta(t)$