UFRJ

Politécnica
UFRJ

CONCURSO DE PROVAS E TÍTULOS DO MAGISTÉRIO SUPERIOR
EDITAL N° 54 DE 30/01/2024 – PUBLICADO NO DOU N° 24 DE 02/02/2024

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

VAGA MC-204 – SETOR DE CIRCUITOS ELÉTRICOS E SISTEMAS LINEARES

DIA: 04 de novembro de 2024.

LOCAL: Sala 227A - Bloco H - Escola Politécnica/CT/UFRJ

CADERNO DE QUESTÕES - PROVA ESCRITA

1) Discorra amplamente sobre Utilização de transformada de Laplace na análise de circuitos, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um circuito de ordem igual ou maior a 2.

2) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando função de transferência, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.

3) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando equações de estado, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G7T1

QUESTÃO Nº 1

1. A transformada de Laplace permite a representação de uma função no domínio do tempo para o domínio da frequência no plano s. A transformada de Fourier também permite a representação de uma função no domínio do tempo para o domínio da frequência, mas nesse caso, no plano complexo.

A transformada de Laplace é um caso geral da representação das funções do domínio do tempo, sendo a transformada de Fourier um caso particular da transformada de Laplace. Isto pode ser verificado observando que a transformada de Laplace considera sua representação em função s, em que $s = \sigma + j\omega d$, e a transformada de Fourier de função de $j\omega$.

Pode-se exemplificar essa relação da transformadas a partir de suas definições. A transformada de Fourier é definida como

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

em que $f(t)$ é uma função no domínio do tempo.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G7T1

QUESTÃO Nº 1

A transformada de Laplace é definida por

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad (1)$$

Exemplo: Seja f(t) uma função do domínio do tempo representada por

$$f(t) = 1 .$$

Aplique a transformada de Laplace em f(t).

Solução:

A partir da definição da transformada de Laplace

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

substitui-se f(t):

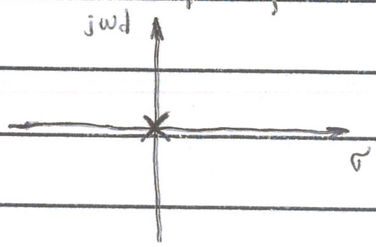
$$F(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st}\, dt$$

$$F(s) = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{s}\left[e^{-s\cdot\infty} - e^{-s\cdot 0} \right] = -\frac{1}{s}\left[\cancel{e^{-\infty}}^{\,0} - \cancel{e^{0}}^{\,1} \right]$$

$$F(s) = \cancel{-}\frac{1}{s}\left[0 \cancel{-} 1 \right] \quad \therefore \; F(s) = \frac{1}{s} \;//$$

F(s) representa uma função degrau no plano s.

Plano s :



Possui um pólo em zero.

Politécnica UFRJ	UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO ESCOLA POLITÉCNICA DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G7T1

QUESTÃO Nº 1

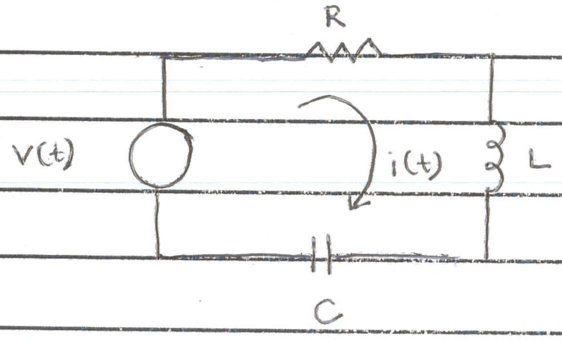
Na análise de circuitos, a transformada de Laplace pode ser muito útil, uma vez que pode simplificar a representação do circuito. Logo, é possível, por exemplo, ~~esta~~ encontrar a relação da saída com a entrada, denominada função de transferência dada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

em que, $Y(s)$ é a saída de um determinado circuito, $U(s)$ é a entrada de um determinado circuito e $G(s)$ é a função de transferência.

Outra aplicação da transformada de Laplace em circuitos é a solução de equações diferenciais de ordem n.

Para exemplificar, considere o circuito da figura abaixo.



Determine $V(t)$, dado que ~~[illegible]~~ $\frac{dV(0)}{dt} = 1$, $V(0) = 0$,

$R = 5\,\Omega$, $L = 1\,H$, $C = \frac{1}{4}\,F$

Politécnica UFRJ	UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO ESCOLA POLITÉCNICA DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

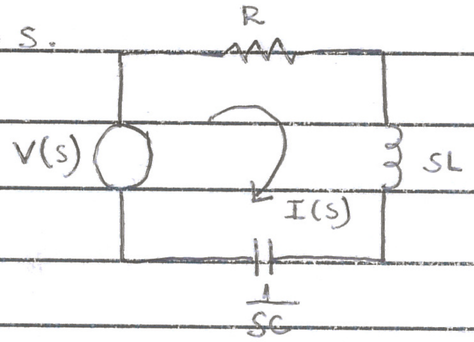
CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G7T1

QUESTÃO Nº 1

Solução:

Passo 1: Representar o circuito no domínio da frequência no plano s.



Passo 2: Escreva a equação para V(s).

Usando a lei de kirchhoff das tensões no circuito acima, tem-se que

$$R\,I(s) + sL\,I(s) + \frac{1}{sC}\,I(s) = V(s)$$

$$R\,I(s) + sL\,I(s) + \frac{1}{sC}\,I(s) = V(s)$$

$$sR\,I(s) + s^2L\,I(s) + \frac{1}{C}\,I(s) = V(s) \;\; :L$$

$$s\frac{R}{L}\,I(s) + s^2\,I(s) + \frac{1}{LC}I(s) = \frac{V(s)}{L}$$

$$s^2\,I(s) + \frac{R}{L}s\,I(s) + \frac{1}{LC}\,I(s) = \frac{V(s)}{L}$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G7TL

QUESTÃO Nº

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\Delta = \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}$$

$$\lambda = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2}$$

$$\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{\frac{25}{1} - \frac{4}{1/4}}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$\lambda = -2{,}5 \pm 1{,}5 = -\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\lambda_1 = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1 \quad ; \quad \lambda_2 = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -4$$

$$\frac{V(t)}{L} = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-4t}$$

$$V(t) = Lk_1 e^{-t} + Lk_2 e^{-4t} = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-4t}$$

$$V(0) = k_1 e^0 + k_2 e^0 \therefore 0 = k_1 + k_2 \therefore k_1 = -k_2$$

$$\frac{dV(0)}{dt} = -e^{-t}k_1 - 4k_2 e^{-4t} = -e^0 k_1 - 4k_2 e^0$$

$$\frac{dV(0)}{dt} = -k_1 - 4k_2 \therefore 1 = -k_1 - 4k_2 \therefore 1 = k_2 - 4k_2 \therefore 1 = -3k_2$$

Politécnica UFRJ	UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO ESCOLA POLITÉCNICA DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G7T1

QUESTÃO Nº 1

$k_2 = -\frac{1}{3}$ $\quad k_1 = -k_2 = \frac{1}{3}$

$V(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$

FOLHA Nº 6

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G7T1

QUESTÃO Nº 2

2. A função de transferência representa a relação entre a saída e a entrada de um circuito. A ~~Ex~~ função de transferência representa o modelo / dinâmica do um sistema. A função de transferência é dada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

em que, Y(s) é a saída do sistema, U(s) é a entrada do sistema e G(s) é a função de transferência.

A função de transferência é muito útil, pois permite que o sistema seja ~~[illegible]~~, por exemplo, controlado. A partir do controle do sistema é possível estabilizar o sistema, ajustar sua saída, ajustar o tempo que o sistema entra em regime permanente, entre outros.

A área que busca encontrar um modelo para um sistema é a identificação de sistemas. A identificação de sistemas utiliza a entrada e a saída para determinar um modelo, que pode ser uma função de transferência ou uma representação em espaço de estados.

A partir da resposta em frequência do sistema é possível ajustar uma função que representará o sistema. ~~[illegible]~~

Além disso, outras técnicas são capazes de estimar a

Politécnica UFRJ	**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO** **ESCOLA POLITÉCNICA** **DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA** **EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204**

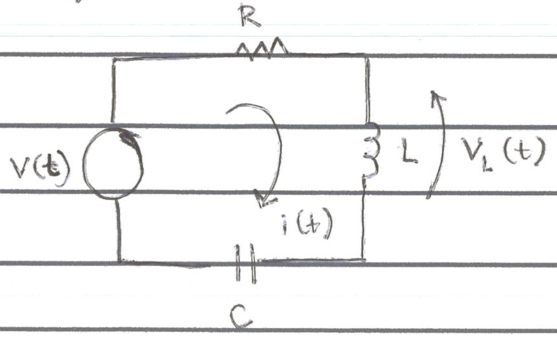
CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	**CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO**
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G7T1

QUESTÃO Nº 2

função de transferência de um dado sistema, como o método vector fitting, técnica desenvolvida e disponibilizada pelos autores para determinar um modelo estimado de um sistema, podendo ser representado por uma função de transferência ou um modelo em estado de estados. É amplamente utilizado em sistema de potência. Outra técnica desenvolvida por pesquisadores do Instituto Militar de Engenharia (IME) e denominada N2CACGO, também estima modelos de sistemas como uma função de transferência. Esta técnica foi desenvolvida utilizando o domínio da frequência e é capaz de ajustar modelos monovariáveis e multivariáveis de sistemas lineares.

Para exemplificar a função de transferência de um sistema, considere o circuito a seguir



determine a função de transferência do $\dfrac{V_L(s)}{V(s)}$.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G7T1

QUESTÃO Nº 2

$$V_L(s) = Ls\,I(s)$$

$$V_S(s) = s^2 L I(s) + sR\,I(s) + \frac{1}{C} I(s)$$

$$\frac{V_L(s)}{V_S(s)} = \frac{Ls\,\cancel{I(s)}}{\left(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}\right)\cancel{I(s)}}$$

$$\frac{V_L(s)}{V(s)} = \frac{Ls}{Ls^2 + Rs + 1/C} \begin{matrix} :L \\ :L \end{matrix} = \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$\boxed{\frac{V_L(s)}{V(s)} = \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}} \longrightarrow \text{função de transferência}$$

Para uma entrada degrau $V(t) = 1$, tem-se ~~[illegible]~~ a tensão no indutor:

$$V(s) = \frac{1}{s}$$

$$V_L(s) = \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} V(s) = \frac{\cancel{s}}{\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right)\cancel{s}}$$

$$V_L(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

A partir da função de transferência, pode-se extrair a equação característica do sistema.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G7T1

QUESTÃO Nº 2

A equação característica permite diversas análises do sistema ~~como~~ como a estabilidade do sistema, por exemplo.

Para $\frac{V_L(s)}{V(s)}$, a equação característica é dada por

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

As raízes da equação acima definem os pólos do sistema, sendo raízes negativas da parte real representando um sistema estável, ~~[illegible]~~ e raízes positivas na parte real um sistema estável. Raízes puramente imaginárias indicam um sistema marginalmente estável.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G7T1

QUESTÃO Nº 3

As equações de estado podem representar o modelo de um sistema por meio de matrizes que relacionam a entrada, a saída e os estados.

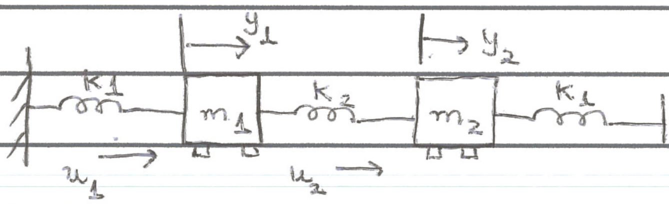
As equações de estado para representar um modelo de um sistema são dadas por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

em que, A é a matriz de transição, B é a matriz de entradas, C é a matriz de saídas e D é a matriz de transferência.

Para exemplificar, considere o sistema abaixo.



Esse sistema pode ser representado por equações de estado.

$$u_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 = m_1 \ddot{y}_1 \qquad (1)$$

$$u_2 + (k_1 + k_2)y_2 - k_2 y_1 = m_2 \ddot{y}_1 \qquad (2)$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G7T1

QUESTÃO Nº 3

Definindo $x_1 = y_1$, $x_2 = \dot{y}_1$, $x_3 = y_2$, $x_4 = \dot{y}_2$

e substituindo equações (1) e (2), tem-se

$$m_1 \dot{x}_2 = (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_3 + u_1$$

$$\dot{x}_2 = \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1}\right) x_1 - \frac{k_2}{m_1} x_3 + \frac{u_1}{m_1}$$

$$m_2 \dot{x}_4 = (k_1 + k_2) x_3 - k_2 x_1 + u_2$$

$$\dot{x}_4 = \left(\frac{k_1 + k_2}{m_2}\right) x_3 - \frac{k_2}{m_2} x_1 + \frac{u_2}{m_2}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1+k_2}{m_1} & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{k_1+k_2}{m_2} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/m_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	G7T1

QUESTÃO Nº 3

As equações de estado são:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{(k_1+k_2)}{m_1} x_1 - \frac{k_2}{m_1} x_3 + \frac{u_1}{m_1}$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{(k_1+k_2)}{m_2} x_3 - \frac{k_2}{m_2} x_1 + \frac{u_2}{m_2}$$

As equações de estado são úteis para representar o sistema, especialmente, nos casos de aplicações computacionais, uma vez que representar o modelo com matrizes em softwares e hardware é mais viável de manipular. Além disso, as equações de estado permitem analizar o sistema facilmente quanto a sua controlabilidade e observabilidade, levando em consideração as matriz de estado, a matriz de saída e a matriz de entrada.

Matriz de contralabilidade $= [B \;\; AB \;\; \dots \;\; A^n B]$

Matriz de observabilidade $= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^n \end{bmatrix}$

se a posto dessas matrizes for ~~ci~~ cheio, o sistema é dito controlável, observável ou controlável e observável.