CONCURSO DE PROVAS E TÍTULOS DO MAGISTÉRIO SUPERIOR
EDITAL N° 54 DE 30/01/2024 – PUBLICADO NO DOU N° 24 DE 02/02/2024

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

VAGA MC-204 – SETOR DE CIRCUITOS ELÉTRICOS E SISTEMAS LINEARES

DIA: 04 de novembro de 2024.

LOCAL: Sala 227A - Bloco H - Escola Politécnica/CT/UFRJ

CADERNO DE QUESTÕES - PROVA ESCRITA

1) Discorra amplamente sobre Utilização de transformada de Laplace na análise de circuitos, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um circuito de ordem igual ou maior a 2.

2) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando função de transferência, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.

3) Discorra amplamente sobre Modelo de sistemas lineares usando equações de estado, apresentando pelo menos um exemplo de problema resolvido no tema considerando um sistema de ordem igual ou maior a 2.

Politécnica UFRJ	UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO ESCOLA POLITÉCNICA DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	F3 Y2

QUESTÃO Nº 1

A transformada de Laplace é um recurso matemático muito utilizado para facilitar a manipulação algébrica no domínio do tempo para o domínio "s", conhecido como domínio da frequência complexa. Sua aplicação pode ser feita em circuitos de 1º ou 2º ordem, digo, na ordem necessária ou disposta do circuito para análise.

A formulação que a define é representada na Equação 1, abaixo:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t).e^{-st}dt \qquad (1)$$

onde $f(t)$ é a função no domínio do tempo.

A partir dessa formulação é possível obter a resposta no domínio de "s". Abaixo, segue a transformação de algumas funções básicas e mais utilizada (tabela 1)

$f(t)$	$F(s)$
$U_0 \rightarrow$ impulso	1
$U_{-1} \rightarrow$ degrau	$1/s$
$U_{-2} \rightarrow$ rampa	$1/s^2$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\text{sen}\, \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

tabela 1: Resumo de algumas funções no domínio s

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	F3Y2

QUESTÃO Nº 1

Há propriedades que são aplicadas para facilitar a manipulação de Laplace. As principais são descritas abaixo:

- $\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s) + G(s)$
- $\mathcal{L}\{Af(t)\} = A\mathcal{L}\{f(t)\} = AF(s)$
- $\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^+)$
- $\mathcal{L}\left\{\frac{d f^2(t)}{dt}\right\} = s^2F(s) - sf'(0^+) - f(0^+)$, para as demais ordens a forma é similar
- $\mathcal{L}\left\{\int_0^{\tau} f(t)\,dt\right\} = \frac{1}{s}$

Para a aplicação e desenvolvimento numa equação diferencial é importante obter uma solução final descrita como a Equação (2) e simplificada em (3).

~~$F(s) = a_1^n s^n + a_2^{n-1} \cdot s^{n-1} + a_3^{n-2} \cdot s^{n-2} + \cdots + a_0$~~

$$F(s) = \frac{a_1 \cdot s^n + a_2 \cdot s^{n-1} + a_3 \cdot s^{n-2} + \cdots + a_0}{b_1 \cdot s^n + b_2 \cdot s^{n-1} + b_3 \cdot s^{n-2} + \cdots + b_0} \qquad (2)$$

$$F(s) = \frac{A_1}{(a_1+s)} + \frac{A_2}{(a_2+s)} + \frac{C_3}{(a_3+s)} + \cdots \qquad (3)$$

Ao obter a Equação 2, é necessário ajustar a F(s) para que seja

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	F3Y2

QUESTÃO Nº

possível obter a solução final no domínio do tempo, por meio de frações parciais. Para facilitar a compreendimento temos um exemplo simples:

Ex① $F(s) = \frac{s+4}{s^2+3s+2} \rightarrow F(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)}$ (*)

As raízes do denominador são -1 e -2, aplicando a quebra em frações obtemos (*). E para encontrar os numeradores A e B basta aplicar o desenvolvimento da equação (*) e igualar as parcelas de cada lado da equação. Logo:

$As + 2A + Bs + B = s+4$

$(A+B)s + (2A+B) = s+4$

em que: $A+B=1$ e $2A+B=4$

Logo, $A=3$ e $B=-2$ e portanto: $F(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{(-2)}{(s+2)}$

Este exemplo simples pode ser extendido para as demais funções de Laplace. A aplicação da fração parcial facilita a transformação de Laplace para o domínio do tempo, ou seja, a volta para a solução final. Para tal solução a função inversa de Laplace é formulada conforme a Equação (4).

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-\omega}^{\sigma+\omega} F(s)\cdot e^{st}\,dt \qquad (4)$$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	F3Y2

QUESTÃO Nº 1

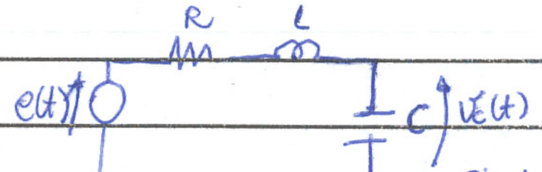
Em aplicação em circuito, a transformação de Laplace permite manipulações matemáticas menos trabalhosas. Para isso, é necessário transformar os elementos presentes em um circuito para o domínio de s, ou frequência complexa. Dessa forma, considerando os elementos descarregados:

$R \longrightarrow R$ · Resistor dado em unidade ômica (Ω)

$L \longrightarrow s.L$ Indutor dada a transformação em "s" (Ω)

$C \longrightarrow 1/Cs$ capacitor dada a transformação em "s" (Ω)

Ressalta-se que ao transformar os elementos que compõem um determinado circuito é possível obter sua corrente, tensão e potência. Seja o circuito abaixo, para obter $v_c(t)$ tem-se:



onde $e(t) = \cos t$ V

Fig.1

Esse circuito é redesenhado no domínio de "s", como:

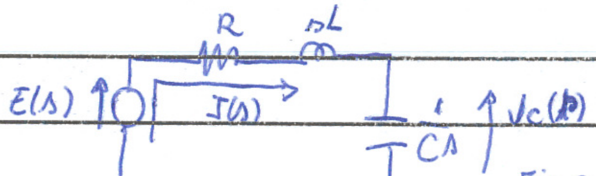


Fig 2

Na Fig.1, a equação pode ser descrita como:

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	F3Y2

QUESTÃO Nº 1

$$e(t) = R\cdot i(t) + L\frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt + v_c(0^-)$$

Considerando o circuito sem energia armazenda, é possível resolver essa equação diferencial de segunda ordem no domínio do tempo, em função do tempo.

No entanto, transformando a equação correspondente em função do domínio "s" temos:

$$E(s) = R\cdot I(s) + sL\cdot I(s) + \frac{1}{Cs}\cdot I(s)$$

$$E(s) = \left(R + sL + \frac{1}{Cs}\right) I(s)$$

Sendo $E(s) = 1\angle 0$ V, temos:

$$I(s) = \frac{1\angle 0}{R + sL + \frac{1}{Cs}} = \frac{s}{RCs + s^2LC + 1} = \frac{s}{s^2LC + RCs + 1}$$

onde $I(s) = \dfrac{s}{\left(+\frac{L}{2R} + \frac{\sqrt{L^2-4}}{2RC} + s\right)\left(s + \frac{L}{2R} - \frac{\sqrt{C^2-4}}{2RC}\right)}$ A

A tensão sobre o capacitor é dada por $V(s) = \frac{1}{sC}\cdot I(s)$.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	F3 Y2

QUESTÃO Nº 1

Logo:

$$V_C(s) = \frac{1}{s^2 L\cdot C^2 + RC^2 s + 1}$$ ✓

para obter a solução no domínio do tempo é necessário saber as propriedade inversa de Laplace, também é possível obter a solução substituindo o valor de s. o qual corresponde a $s = j1$.

Logo:

$$V_C(t) = \left.\frac{1}{s^2 LC^2 + RC^2 s + 1}\right|_{s=j} = \frac{1}{-LC^2 + RC^2 j + 1} = \frac{1}{(1-LC^2) + (-RC^2)j}$$

$$v_C(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-LC^2)^2 + (-RC^2)^2}\ \underline{|\text{atg}\left(\frac{-RC^2}{1-LC^2}\right)}}$$

$$\boxed{v_C(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-LC^2)^2 + (-RC^2)^2}} \cdot \cos\left(t + \text{atg}\left(\frac{-RC^2}{1-LC^2}\right)\right)}$$ ✓ para $t > 0$

Ressalta-se que ao avaliar a resposta no domínio de "s" é possível analisar o comportamento do circuito, quanto a sua estabilidade e comportamento. Neste caso há três tipos de resposta "s". Sendo $s = \sigma + jw$. Onde σ é a constante de amortecimento e w a frequência de amortecimento tem-se:

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
EDITAL Nº 54/2024 - VAGA MC-204

Politécnica UFRJ

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO EFETIVO DE VAGAS NO CARGO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	F3Y2

QUESTÃO Nº 1

- $\sigma > \omega$ → sistema sobreamortecido com duas soluções reais distintas.
- $\sigma = \omega$ → sistema crítico com duas soluções iguais
- $\sigma < \omega$ → sistema subamortecido com duas soluções/raizes distintas e conjugada.

Esta analise é feita no denominador da função F(s) para encontrar as raízes. Mediante das respostas da raizes encontradas, é possivel saber se o comportamento circuito é estável e instavel.

Para analise de Estabilidade é Importante lembrar que em F(s) apresentado em Eq. (2) e (3) possuem a parte do numerador e denominador. Em que, no numerador temos os zeros da função, o qual a função tende a ser zero. E o denominador os pólos da função; o qual tende a ser infinito para a função F(s) seja estável.

Para a analise é importante avaliar os pólos da função. Para pólos menores que zeros o sistema tem o comportamento estável, caso contrário a afirmação não é verdadeira. Existem métodos como Routh e de Nyquist que são alternativas que também avaliam a estabilidade do sistema sem a necessidade de expandir a função em frações parciais ou fração completa para avaliar os pólos.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	F3V2

QUESTÃO Nº 1

no entanto, esses métodos não serão aqui abordados, mas suas explicações estão disponíveis em livros de controle, como por exemplo o Ogatta.

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	F3Y2

QUESTÃO Nº 2

A modelagem e análise de circuitos pode ser avaliada de várias formas: no seu domínio do tempo, no seu domínio da frequência e no seu domínio da frequência complexa. Para tais avaliações é importante verificar sua resposta completa, ou seja, contabilizada em seu período transitório e em seu período permanente. Ressalta-se que ao trabalharmos com o circuito ~~em~~ no domínio da frequência não é considerado o seu estado transitório, ou seja, o tempo é suficiente grande para que o sistema opere em estado permanente.

A solução completa de ~~sea~~ um circuito elétrico é definida portanto, por:

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) \qquad (1)$$

onde: $x_p(t) \rightarrow$ solução ~~particular~~ particular ou natural

$x_h(t) \rightarrow$ solução homogênea ou forçante.

A solução homogênea depende do tipo de excitação que ocorre no circuito. Dessa forma, ao saber que tipo de fonte o circuito está recebendo tensão ou corrente é possível obter uma resposta por meio da tabela abaixo:

$f(t)$	$f_h(t)$	
k	ke^{at}	$\rightarrow$ sendo $s = a$, raiz real da solução. Para $a=0 \rightarrow f_h(t) = k$

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	F3 Y2

QUESTÃO Nº 2

$f(t)$	$f_n(t)$
$\cos(t\omega)$	$A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t$
$\mathrm{sen}(t\omega)$	$A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t$
$Ke^{\alpha t}$	$Kte^{\alpha t}$

A solução particular é obtida resolvendo a equação correspondi do circuito e encontrando as raízes para a tal solução. Após encontrar as soluções considerando as raízes, dada por $r = \alpha + j\omega$. Onde α é a parcela real e ω é a frequência imaginária (amorticidade) do sistema. Se a solução da equação diferencial possuir parcela real e distinta uma da outra ela terá a seguinte resposta de saída

$r_1 \neq r_2 \rightarrow Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ (2)

Para raízes reais e imaginárias iguais ($r_1 = r_2$), a resposta de saída será:

$Ate^{r_1 t} + Be^{r_1 t}$ (3)

E por fim, se as raízes forem diferentes e possuirem valores imaginarios:

$e^{\alpha t}(\cos\omega_d t + \mathrm{sen}\,\omega_d t)$ (4)

onde $\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$.

Ressalta-se que para obtenção de $f_p(t)$ final é necessário substituir as equações corresponte na equação diferencial que

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	F3Y2

QUESTÃO Nº 2

define o circuito.

A solução completa, portanto, apresentada em (1) corresponde a soma da solução forçante e particular.

Para facilitar a solução de qualquer variável do circuito a ser analisado, é possível aplicar o conceito de Função transferência. A função transferência permite achar a relação de saída entre a entrada de um circuito em qual ponto a ser analisado.

Sendo a figura 1 abaixo:

$E(s) \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow S(s)$

Fig 1: Exemplo de função de transferência

onde $E(s)$ → a função em s (domínio) de entrada.

$S(s)$ → a função em s (domínio) de saída.

$H(s)$ → função de transferência.

Conforme apresentado na Fig. 1, a função transferência é definida pela relação das respostas, dadas:

$$H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} \qquad (5)$$

Ao obter a relação $H(s)$ é possível obter a resposta em um determinado ponto em relação a função transferência.

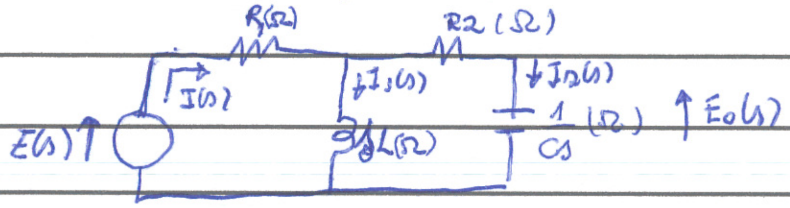
PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	F5Y2

QUESTÃO Nº 2

Em circuito sua aplicação pode ser dada como:

- ganho de tensão: $H(s) = \frac{V_s(s)}{V_e(s)}$ onde s - saída e e - entrada
- ganho de corrente: $H(s) = \frac{I_s(s)}{I_e(s)}$
- ganho de impedância: $H(s) = \frac{V_s(s)}{I_e(s)}$
- ganho de admitância: $H(s) = \frac{I_s(s)}{V_e(s)}$

A aplicação da função transferência após obter o circuito correspondente, torna-se fácil manipulação. Para tal afirmação tem-se o circuito exemplo abaixo:



Deseja-se calcular a tensão de saída E_o. Para o domínio de s apresentado no circuito conseguimos encontrar a função transferência correspondente dada por $H(s) = \frac{E_o(s)}{E(s)}$.

Daí por analise de circuitos, encontrarmos I(s) da fonte e

PROVA ESCRITA (CADERNO DE RESPOSTAS)	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO
LOCAL: SALA 227A – BLOCO H – ESCOLA POLITÉCNICA/CT/UFRJ DATA: 04/11/2024	F3Y2

QUESTÃO Nº 2

aplicarmos divisão de corrente obtermos $I_s(s)$ correspondente ao ramo que possui o capacitor. Dessa forma:

$$Z_{eq} = R + \left(\frac{sL \cdot (R_2 + \frac{1}{Cs})}{sL + R_2 + \frac{1}{Cs}} \right) = R_1 + \frac{s^2 L R_2 C + CLs^2}{s^2 CL + R_2 \cdot C \cdot s + 1} \Rightarrow$$

$$Z_{eq} = \frac{(R_2 LC + LC + R_1 L) s^2 + R_1 R_2 C s + R_1}{s^2 CL + R_2 C s + 1} = Z(s)$$

A corrente total da fonte é dada por $I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)}$

Sabendo $I(s)$, tem-se:

$$I_s = \frac{sL}{R_2 + \frac{1}{Cs}} \times \left[\frac{s^2 CL + R_2 C s + 1}{(R_2 LC + LC + R_1 L) s^2 + R_1 R_2 C s + R_1} \right] \cdot E(s)$$

Logo, a tensão no capacitor é dada por:

~~$E_o(s) = I_s(s) \cdot Z_{eq}$~~

$$E_o(s) = I(s) \cdot \frac{1}{sC}$$

Para obter a solução final em termos da função transferência a tensão de saída $E_o(s)$ que está sobre a relação da tensão de entrada $E(s)$ é cancelada e portanto sua resposta final não necessariamente precisa saber o valor real a fonte de entrada.